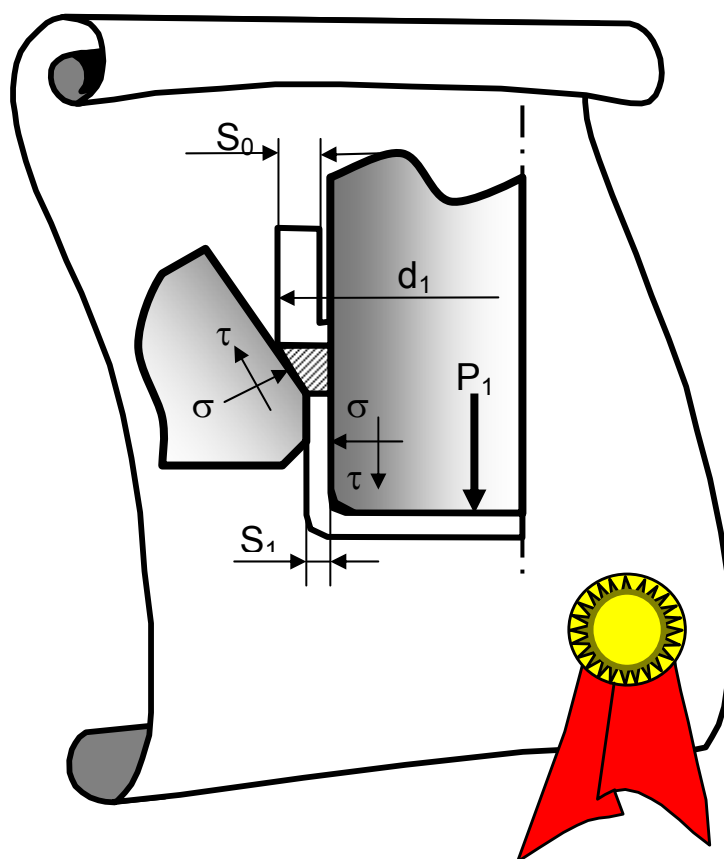


МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«УЛЬЯНОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

В. И. Филимонов, О. В. Мищенко

ТЕОРИЯ ОБРАБОТКИ МЕТАЛЛОВ ДАВЛЕНИЕМ

Учебное пособие



Ульяновск
УлГТУ
2012

УДК 620.186 (075)
ББК 34.62 я 7
Ф53

*Утверждено редакционно-издательским
советом университета в качестве
учебного пособия*

Рецензент доцент кафедры «М и ОМД» УлГТУ, канд. техн. наук
В. Н. Кокорин

Филимонов, В. И.

Ф53 Теория обработки металлов давлением: учебное
пособие / В. И. Филимонов, О. В. Мищенко. – Ульяновск : УлГТУ,
2012. – 208 с.

Учебное пособие полностью соответствует программе курса «Теория обработки металлов давлением» направления 150700 «Машиностроение» и содержит материалы лекций, перечень вопросов и упражнений к каждой из лекций для самостоятельной работы студентов, а также методические указания и список литературы.

Работа подготовлена на кафедре «Материаловедения и обработки металлов давлением».

Печатается в авторской редакции.

**УДК 620.186 (075)
ББК 34.62 я 7**

Учебное электронное издание

ФИЛИМОНОВ Вячеслав Иванович
МИЩЕНКО Ольга Владимировна

ТЕОРИЯ ОБРАБОТКИ МЕТАЛЛОВ ДАВЛЕНИЕМ

Учебное пособие

Объем данных 2,29 Мб. ЭИ № 144.

Ульяновский государственный технический университет, ИПК «Венец»

432027, г. Ульяновск, ул. Сев. Венец, д. 32.

Тел.: (8422) 778-113.

E-mail: venec@ulstu.ru

<http://www.venec.ulstu.ru>

© Филимонов В. И., Мищенко О. В., 2012
© Оформление. УлГТУ, 2012

ВВЕДЕНИЕ

Данный курс лекций полностью соответствует программе по дисциплине «Теория обработки металлов давлением» (ТОМД), рассчитанному на 64 лекционных часа и читаемому студентам третьего курса направления 150700 «Машиностроение».

При изготовлении деталей методами обработки металлов давлением (ОМД) возникают задачи подбора оборудования, проектирования оснастки, выбора режимов формообразования, решение которых зачастую требует от специалиста знаний основ ТОМД и определенного навыка решения технологических задач. Многие расчетные параметры получают из теории пластичности – дисциплины, предметом которой является расчет напряжений и деформаций при пластическом формоизменении твердого деформируемого тела. Более близкая к производственным процессам дисциплина – технологическая механика (ТОМД – один из ее разделов), которая занимается решением технологических задач в утилитарном подходе к теории.

Цель курса: Ознакомление студентов с теоретическими основами ОМД, моделями сплошных сред и методами решения технологических задач в процессах обработки металлов давлением.

Практические задачи ТОМД: 1. Установление распределения напряжений и деформаций по объему детали. 2. Определение изменения формы и размеров заготовки в процессе деформирования. 3. Выявление распределения сил по поверхности инструмента. 4. Определение энергетических параметров процесса и мощности привода технологического оборудования. 5. Формулировка условий и определение надлежащих параметров для получения детали требуемого качества и др.

РАЗДЕЛ 1. ПРИРОДА ПЛАСТИЧЕСКОЙ ДЕФОРМАЦИИ
Лекция 1. Понятие о напряжении, видах деформации, скорости деформации и пластичности

=====

1. Понятие о напряжении, деформации и скорости деформации при одноосном растяжении или сжатии. 2. Упругая и пластическая деформация, соотношение между ними при обработке металлов давлением. 3. Пластичность и ее количественная оценка.

=====

1. Напряжения. Приложение внешних сил к деформируемому твердому телу вызывает изменение его внутреннего состояния. Пусть к телу (заготовке) приложены внешние силы и моменты, указанные на рис. 1.1. При определенных условиях действие внешних силовых факторов на малую площадку dA , принадлежащую телу, можно рассматривать как приложение к ней некоторой результирующей силы. Для характеристики силового воздействия на площадку

dA можно ввести так называемый вектор напряжений $\vec{\sigma}^n$, который определяется следующим образом:

$$\vec{\sigma}^n = \lim_{dA \rightarrow 0} \frac{\vec{f}}{dA} \Rightarrow T_\sigma, \quad (1.1)$$

где \vec{f} - элементарная результирующая сила.

Величина $\vec{\sigma}^n$ из (1.1) порождает тензор напряжений T_σ . Последний имеет вид:

$$T_\sigma = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{pmatrix}. \quad (1.2)$$

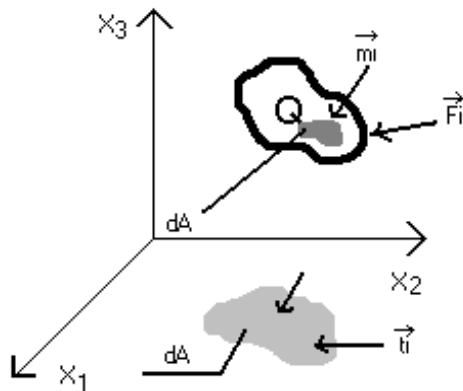


Рис. 1.1. К определению вектора напряжений

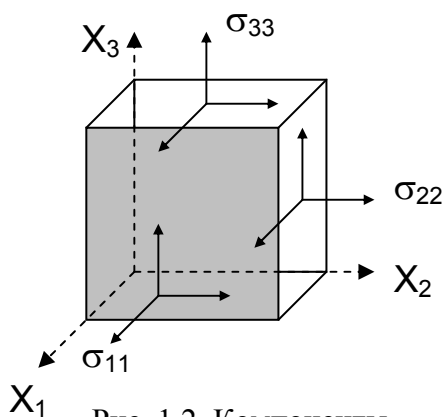


Рис. 1.2. Компоненты тензора напряжений

Компоненты тензора напряжений σ_{ij} относятся к соответствующим граням элементарного объема, причем, первый индекс указывает положение грани, перпендикулярной направлению оси i , а второй – направление действия силы j на этой грани (рис. 1.2). Как будет показано далее, тензор (1.2) обладает свойством симметричности: $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$.

Деформации. Внешнее проявление действия внешних сил на деформируемое тело — наличие деформации (изменение форм

и размеров). Деформация может рассматриваться как процесс деформирования или его результат и как некоторая количественная характеристика объекта, подверженного деформированию. Условно деформации подразделяют на: 1) линейную; 2) угловую; 3) поверхностную и 4) объемную (рис. 1.3).

Различают деформации обычные и логарифмические (натуральные), которые будут обозначаться ε и e соответственно. Если обозначить l_0 и l первоначальную и конечную длину образца, подверженного одноосному растяжению или сжатию, то **определение деформаций** можно дать в виде: $\varepsilon = (l - l_0)/l_0$, $e = \ln(l/l_0)$.

Очевидно, между обычной и логарифмической деформациями существует связь: $e = \ln(1 + \varepsilon)$. При малых деформациях ($\varepsilon \ll 1$), в соответствии с формулой Тейлора $\ln(1 + \varepsilon) = \varepsilon - \varepsilon^2/2 + \varepsilon^3/3 - \dots$, и если отбросить величины второго

порядка малости, получим $e \approx \varepsilon$. Логарифмическая деформация обладает свойством **аддитивности**, означающем, что суммарная деформация по этапам нагружения и конечная деформация совпадают. Для иллюстрации этого возьмем образец длиной l_0 и проведем двухступенчатое растяжение его первоначально до длины l_1 , а затем до длины l_2 . Тогда суммарная обычная деформация будет равна $\varepsilon_{\text{кон}} = (l_2 - l_0)/l_0$, а деформация, вычисленная по двум этапам деформирования, составит: на первом этапе $\varepsilon_0 = (l_1 - l_0)/l_0$; на втором этапе $\varepsilon_1 = (l_2 - l_1)/l_1$. Очевидно, что условие аддитивности для обычных деформаций, вообще говоря, не выполняется:

$$|l_0| \rightarrow |l_1| \rightarrow |l_2| \quad \varepsilon_{\text{кон}} = \frac{l_2 - l_0}{l_0}; \quad \varepsilon_0 = \frac{l_1 - l_0}{l_0}; \quad \varepsilon_1 = \frac{l_2 - l_1}{l_1}; \quad \varepsilon_{\Sigma} = \varepsilon_0 + \varepsilon_1 \neq \varepsilon_{\text{кон}}.$$

Для логарифмических деформаций аналогичное условие выполняется:

$$e_{\kappa} = \ln \frac{l_2}{l_0}; \quad e_0 = \ln \frac{l_1}{l_0}; \quad e_1 = \ln \frac{l_2}{l_1}; \quad e_{\Sigma} = e_0 + e_1 = \ln \frac{l_1}{l_0} + \ln \frac{l_2}{l_1} = \ln \frac{l_2}{l_0} = e_{\kappa}.$$

Следовательно, при поэтапной регистрации значительных по величине напряжений с последующим их суммированием предпочтительнее работать с логарифмическими деформациями, а не с обычными.

2. Упругая и пластическая деформации. Различают также упругие и пластические деформации. *Упругая деформация* - это деформация, исчезающая после снятия нагрузки. *Пластическая деформация* - деформация, остающаяся после снятия нагрузки. Полная деформация - сумма упругой и пластической деформаций в данный момент приложения нагрузки. В реальных процессах различить упругую и пластическую деформации невозможно, они проявляются

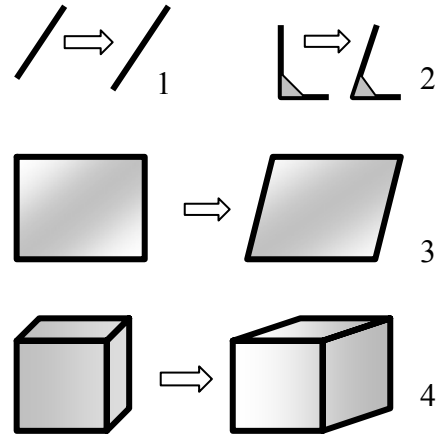


Рис. 1.3. Виды деформаций

только после снятия нагрузки. Упругая деформация подчиняется закону Гука (здесь - для одномерного растяжения – сжатия):

$$\sigma = \varepsilon \cdot E,$$

где E – коэффициент пропорциональности (модуль Юнга), которой определяет угол наклона прямолинейного участка диаграммы одноосного растяжения ($\operatorname{tg} \alpha = E$) на рис. 1.4. Для справки приведем значения предельных упругих деформаций для меди и стали:

$$\varepsilon_y = \begin{cases} 1,3\% - \text{медь} \\ 0,6\% - \text{сталь.} \end{cases}$$

На рис. 1.4 приняты следующие обозначения:

σ_s – предел текучести (при температуре нагрева);

$\sigma_T, \sigma_{0,2}$ – предел текучести (при комнатной температуре);

σ_B – предел прочности.

Разгрузка происходит по прямой, параллельной участку диаграммы в упругой области.

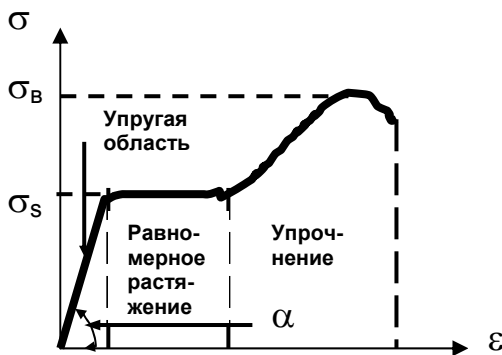


Рис. 1.4. Диаграмма одноосного растяжения

3. Пластичность. Пластичность понимается в ТОМД в двух аспектах:

1. Как свойство материала получать пластические деформации без разрушения.
2. Как некая характеристика материала. Такими характеристиками могут быть:

δ – относительное удлинение образца;

ψ – относительное сужение шейки образца, подверженного испытанию.

Пластичность зависит от условий деформирования, а потому она, скорее не, свойство материала, а состояние — способность тела получать пластические деформации без разрушения. Пластичность оценивается максимальной величиной пластической деформации без разрушения (применительно к данной схеме напряженно-деформированного состояния). Для большинства конструкционных материалов, подвергаемых ОМД, величина относительного удлинения лежит в пределах от 8 до 60 %, хотя, например, монокристалл цинка может иметь 10-кратное удлинение.

Контрольные вопросы и упражнения

1. Дайте определение вектора напряжений и его графическую интерпретацию.
2. Запишите матричное представление тензора напряжений.
3. Покажите расположение компонент тензора напряжений на гранях элементарного куба и дайте интерпретацию индексов компонент.

4. Дайте название и графическую интерпретацию четырех видов деформации.
5. Дайте математическое определение обычной и логарифмической деформации.
6. Сделайте вывод формулы, отражающей связь обычных и логарифмических деформаций.
7. Укажите условие, при котором значения обычных и логарифмических деформаций совпадают.
8. Докажите это, используя разложение логарифма в ряд Тейлора.
9. Покажите, что логарифмические деформации обладают свойством аддитивности, а обычные деформации – нет.
10. Дайте определение упругой деформации и запишите закон Гука в одномерном представлении.
11. Укажите размерность каждой из величин, входящих в закон Гука.
12. Дайте определение пластической деформации. Укажите предельные упругие деформации для меди и стали.
13. Нарисуйте диаграмму одноосного растяжения, укажите на ней значения физических констант (предела текучести, прочности), а также линию разгрузки для произвольной точки в пластической области.
14. Сформулируйте два существующих понятия пластичности.
15. Дайте определение количественных оценок пластических свойств материалов через геометрические параметры деформируемого тела.
16. Является ли пластичность свойством материала в строгом смысле?
17. Какова величина относительного удлинения конструкционных материалов?
18. Какие факторы, по Вашему мнению, могут влиять на величину относительного удлинения?
19. Установите связь между относительным удлинением и относительным сужением шейки из условия сохранения объема.

Лекция 2. Строение металлов и сплавов

=====

1. Строение металлов и сплавов. 2. Анизотропия свойств монокристалла и поликристалла. 3. Кристаллическая решетка, виды кристаллических (структурных) решеток, кристаллографические плоскости и направления. Монокристаллическое и поликристаллическое строение. 4. Понятие о пределе текучести при одноосно растяжении.

=====

1. Реальные металлы состоят из зёрен (поликристаллов), которые в свою очередь могут состоять из монокристаллов, с соответствующими границами. В монокристаллах атомы располагаются упорядоченно, в зависимости от природы материала. Базовым понятием для представления кристаллической структуры материала является так называемая элементарная ячейка.

Если взять систему координат с базисом $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$, включающим линейно независимые векторы (рис. 2.1), и расположить в ней с привязкой к началу координат ячейку элементарного типа, то вдоль каждой из осей путём перемещения элементарной ячейки можно получить монокристалл. В некоторых случаях

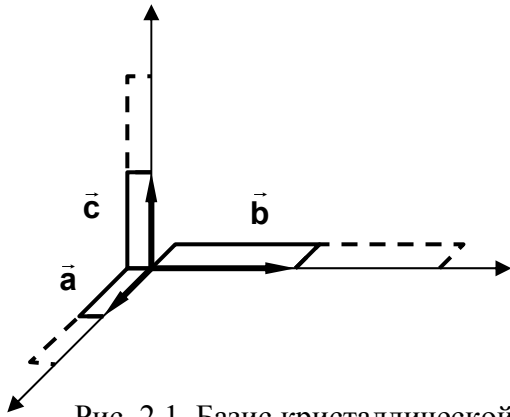


Рис. 2.1. Базис кристаллической структуры

в качестве базиса могут использоваться и линейно зависимые векторы. Многогранник минимальных размеров, путем перемещения которого можно выстроить структуру материала, называется **элементарной ячейкой**, определяющей **структурную решетку**. При этом расстояние между атомами

вдоль направлений $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ будут различными, что отражается на механических характеристиках материала вдоль этих направлений. Среди большого многообразия кристаллических структурных решеток основными являются: объемно центрированная (ОЦК), грани-центрированная кубическая (ГЦК) и гексагональная плотно упакованная (ГПУ). Реальные материалы состоят из хаотически ориентированных кристаллитов, имеющих внутренние дефекты и нерегулярные границы, так что их механические характеристики представляют собой некие усредненные значения. Взаимодействие между отдельными атомами осуществляется в соответствии с моделью рис. 2.2, где даны кривые отталкивания (P_1) и притяжения (P_2) между атомами, пересекающиеся в точке, отстоящей от исходного атома на одно межатомное расстояние (состояние устойчивого равновесия).

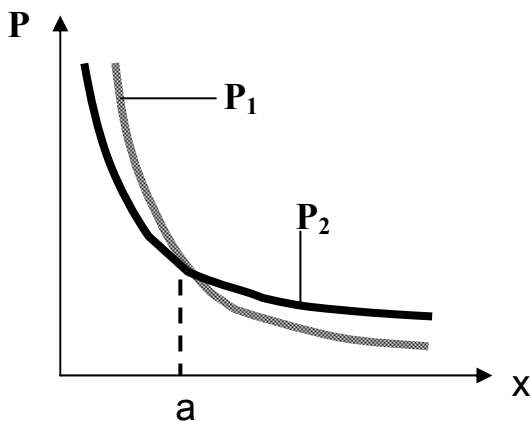


Рис. 2.2. Силы взаимодействия между атомами

2. Если свойства кристалла не зависят от направления, его считают **изотропным**. Когда свойства кристалла различаются по трем взаимно перпендикулярным направлениям, его называют **ортотропным**. В общем случае, когда свойства кристалла в различных направлениях различны, его называют **анизотропным**. Аналогичная классификация справедлива для поликристаллов, материалов и сплавов.

3. Для описания кристаллической структуры выбирают оси координат (рис. 2.1), на которых может быть построен многогранник (элементарная ячейка), движением которого может быть получена структурная решетка материала. Основные типы структурных решеток представлены на рис. 2.3, их соответствие материалам дано в табл. 2.1.

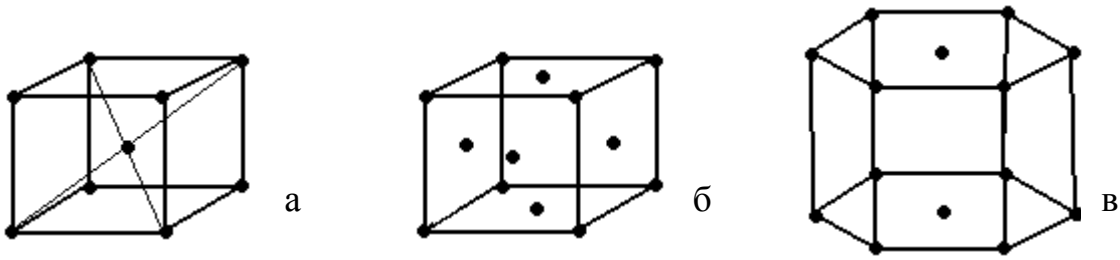


Рис. 2.3. Типы структурных решеток: а) – ОЦК; б) – ГЦК; в) – ГПУ

Таблица 2.1

Соответствие видов структурных решеток и материалов

Тип решетки	Материалы
ОЦК	α -железо, β -железо, литий, ванадий, вольфрам, молибден, хром, тантал
ГЦК	алюминий, γ -железо, золото, медь, никель, платина, свинец, серебро
ГПУ	магний, цинк, бериллий, кадмий, кобальт, α -титан

Развитие пластической деформации происходит по определенным плоскостям и направлениям кристаллической структуры. Для обозначения кристаллографических плоскостей принято следующее соглашение: **плоскость** обозначается набором взаимно простых несократимых чисел (в круглых скобках), которым соответствуют координаты точек пересечения данной плоскости с осями, взятые как обратные величины (рис. 2.4).

Направление определяется набором взаимно простых несократимых чисел в квадратных скобках, соответствующих координатам, наиболее близко расположенного к началу координат атома в терминах параметра решетки (рис. 2.4).

Следует отметить, что для гексагональной решетки в обозначении плоскостей используют четыре параметра, причем возможны и отрицательные значения, знак которых ставится над соответствующим числом.

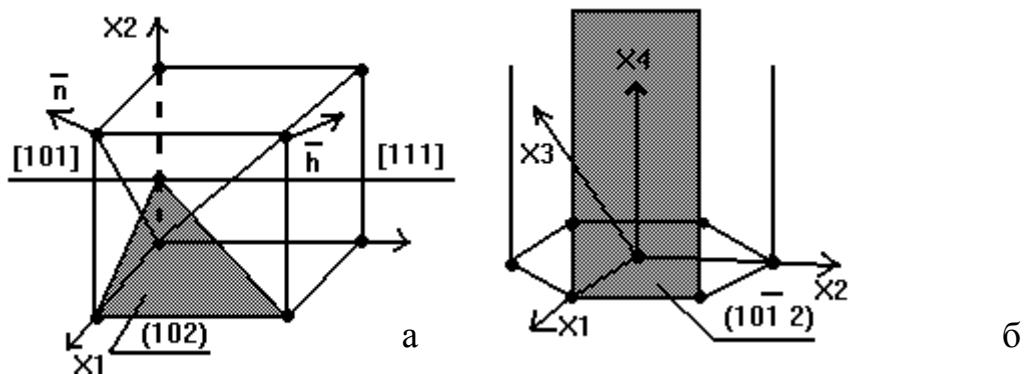


Рис. 2.4. Обозначение кристаллографических плоскостей и направлений: а) – кубическая решетка; б) – гексагональная решетка

При деформации скольжение одних плоскостей по отношению к другим происходит по плоскостям и направлениям с наибольшей плотностью атомов. В исследованиях Е. Шмида и В. Боаса установлено, что при растяжении монокристаллов напряжение течения σ_s существенно зависит от ориентации плоскости скольжения и направления скольжения (рис. 2.5.а). Однако если действительное напряжение растяжения $\sigma = F/A$ преобразовать в приведенное критическое:

$$\tau_{cr} = \sigma \cdot \cos\varphi \cdot \cos\lambda, \quad (2.1)$$

где φ – угол между плоскостью скольжения и осью образца; λ – угол между направлением скольжения и осью образца, то это последнее оказывается константой для каждого металла (закон Шмида).

На рис. 2.5.б, построенном по формуле (2.1), представленные точки относятся к различным материалам.

Реальные металлы обычно состоят не из **монокристаллов**, а из **кристаллитов (зерен)**, отличие между которыми состоит в том, что у (моно)кристаллов грани (края) имеют регулярную структуру, а у кристаллитов – нет. Зерна включают большое количество различным образом ориентированных кристаллических составляющих, а сами образуют **поликристаллы**, так что в целом металлы и сплавы имеют **поликристаллическую структуру**, причем границы зерен обычно имеют гетерогенную структуру, существенно влияющую на механические характеристики материала.

Теоретические и экспериментальные (практические) представления о начале процесса деформирования **реальных материалов** находятся в **противоречии** при рассмотрении касательных напряжений, приводящих к пластическому деформированию. Физическая модель касательных напряжений:

$$\tau_{фм} = k \sin\left(\frac{2\pi u}{a}\right), \quad (2.2)$$

где k – размерный коэффициент; u – смещение атома относительно положения равновесия; a – межатомное расстояние.

Модель касательных напряжений в сопротивлении материалов:

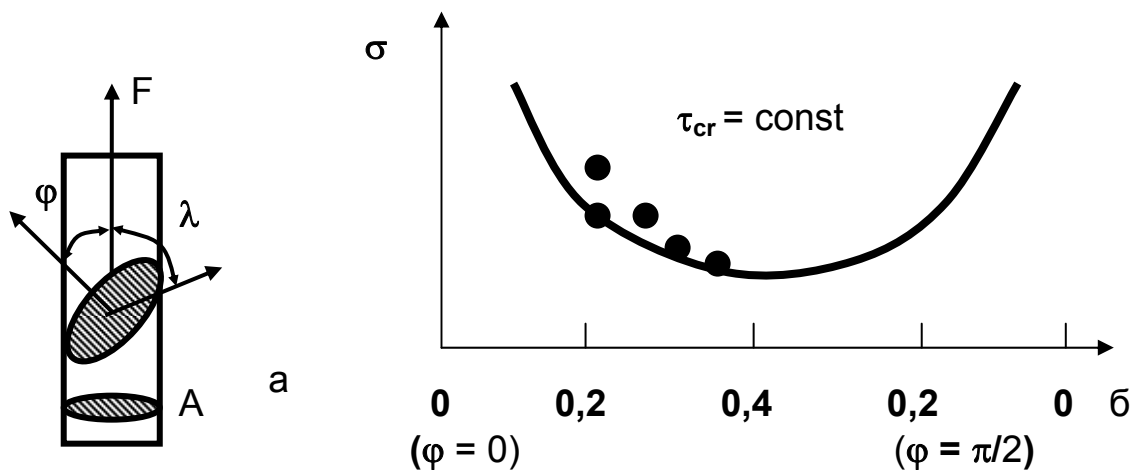


Рис. 2.5. Деформирование кристалла: а) – схема деформирования; б) – график, иллюстрирующий закон Шмида

$$\tau_{\text{мсм}} = G \frac{du}{dy} \approx G \frac{u}{a}, \quad (2.3)$$

где G – модуль сдвига; u – текущая координата, вдоль которой происходит смещение атома.

Сравнивая формулы (2.2) и (2.3), получим:

$$\tau_{\text{фм}} = \tau_{\text{мсм}} \Rightarrow k \frac{2\pi u}{a} = \frac{G \cdot u}{a}; \left(\sin\left(\frac{2\pi u}{a}\right) \approx \frac{2\pi u}{a} \right) \Rightarrow k = \frac{G}{2\pi}. \quad (2.4)$$

При касательном напряжении, равном $\frac{G}{2\pi}$ согласно формуле (2.4), должно было бы наступать пластическое деформирование. В реальности, пластические деформации наступают уже при: $\tau = k_n \approx 10^{-4} G$, что противоречит физической модели. Это объясняется наличием дефектов в металле.

4. При холодной деформации остаточное формоизменение складывается из изменения форм и размеров зерен, причем включение зерен в пластическую деформацию происходит не одновременно, а зависит от их расположения и структуры. По мере увеличения деформирующих сил в этот процесс включается все большее количество зерен, при этом деформация может происходить как на внутривернем уровне, так и на межзеренном. Нормальное напряжение при линейном растяжении или сжатии, соответствующее включению в пластическую деформацию преобладающего большинства зерен металла, является **пределом текучести**.

Контрольные вопросы и упражнения

1. Как определяется базис для элементарной ячейки? Что такое элементарная ячейка?
2. Как получить монокристалл, используя элементарную ячейку?
3. Влияет ли размер базисных векторов на механические характеристики материала?
4. Назовите основные типы кристаллических решёток.
5. Нарисуйте диаграмму взаимодействия атомов и дайте пояснения.
6. Какой материал называется изотропным?
7. Какой материал называется ортотропным?
8. Какой материал называется анизотропным?
9. Дайте рисунок ОЦК – решетки.
10. Нарисуйте ГЦК – решетку.
11. Изобразите ГПУ – решетку.
12. Назовите материалы, имеющие ОЦК – решетку.
13. Назовите материалы, имеющие ГЦК – решетку.
14. Укажите материалы, имеющие ГПУ – решетку.
15. Объясните, как обозначают кристаллографические плоскости в ОЦК – и ГЦК – решетках, дайте изображение какой-либо плоскости для ОЦК – решетки и ее обозначение.
16. Как обозначают плоскости в ГПУ – решетке?

17. Объясните, как обозначают направления в кристаллах.
18. Запишите закон Шмида.
19. Изобразите зависимость нормального напряжения от углов расположения площадки и направления скольжения.
20. В чем состоит отличие кристалла и кристаллита?
21. Чем обусловлена поликристаллическая структура металлов и каково влияние границ составляющих элементов на механические характеристики материала?
22. Запишите модель касательных напряжений и поясните значение входящих величин.
23. Покажите противоречия физической модели и модели сопротивления материалов.
24. Дайте определение предела текучести.

Лекция 3. Несовершенства решетки и структуры металлов

=====

1. Дефекты в металлах, понятие « дислокация», типы дислокаций, скорость движения и перемещения дислокаций. Вектор Бюргера. Возникновение, накопление и взаимодействие дислокаций. 2. Механизмы деформации: скольжение и двойникование. 3. Линии Чернова-Людеса. Полосчатость макроструктуры и текстура.

=====

1. Различают следующие дефекты в металлах:

- Точечные дефекты — вакансии, примесные атомы и дислоцированные атомы (межузельные атомы, пары Френкеля).
- Линейные дефекты — краевые, винтовые и криволинейные дислокации, цепочки вакансий или внедренных атомов.
- Поверхностные дефекты — границы зерен, границы блока (блоки — это обломки зерен).
- Объемные дефекты — трещины, поры, грубые неметаллические включения.

Флуктуация энергии колебательного движения атомов приводит к нарушению регулярности их расположения. В частности, вакансии и межузельные атомы появляются на стадии затвердевания расплава, причем их сочетание приводит к паре Френкеля. Межузельные атомы вносят существенно большее возмущение, чем вакансии при их сравнительно небольшом количестве. Вакансии образуются главным образом по механизму Шоттки, по которому кристалл как бы растворяет пустоту, начиная с поверхности. Вакансии обладают значительной подвижностью, обеспечивая механизм рекомбинации, однако концентрация вакансий остается практически неизменной при низкой температуре.

При повышенных температурах концентрация вакансий увеличивается согласно формуле

$$\frac{n}{N} = \exp\left(\frac{-Q}{RT}\right), \quad (3.1)$$

где n , N – число вакансий и общее число атомов соответственно; Q – энергия образования вакансии; R – постоянная Больцмана.

Так, в соответствии с формулой (3.1) концентрация вакансий в металлах при комнатной температуре составляет: 1 вакансия на $10^{12} - 10^{18}$ атомов, а при температуре плавления: 1 вакансия на $10^3 - 10^4$ атомов.

Дислокация – нарушение регулярной, упорядоченной структуры материала. Представления о дислокациях возникли в 1934 г. в связи с противоречиями между теоретическими расчетами и экспериментальными данными, относящимися к скольжению в кристаллах (Коттрел, Шульце). **Краевые дислокации** обусловлены наличием избыточной атомной плоскости (рис. 3.1). Считаем, что основание призмы закреплено, нагрузка действует на верхнюю часть. Плоскости с лежащими в них атомами, нарушающими упорядоченную структуру называются экстраплоскостями. Линия, соединяющая атомы, лежащие на краю экстраплоскости, называется линией дислокации. Переходные участки, относящиеся к пересечению плоскости скольжения с линиями решетки вблизи экстраплоскости, могут быть представлены трубками с диаметрами 5 – 7 межатомных расстояний. Это так называемое ядро дислокации. Дислокации с экстраплоскостью над плоскостью скольжения считаются положительными, а под плоскостью скольжения отрицательными. На рис. 3.2 представлена **винтовая дислокация**.

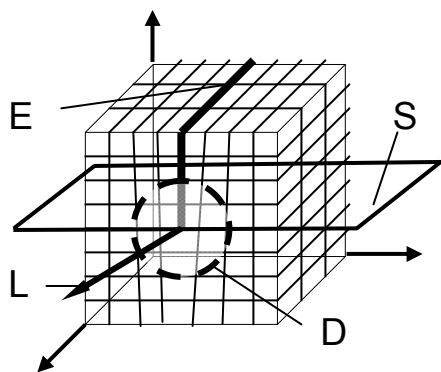


Рис. 3.1. Краевая дислокация: E – экстраплоскость; L – линия дислокации; D – ядро дислокации; S – плоскость скольжения

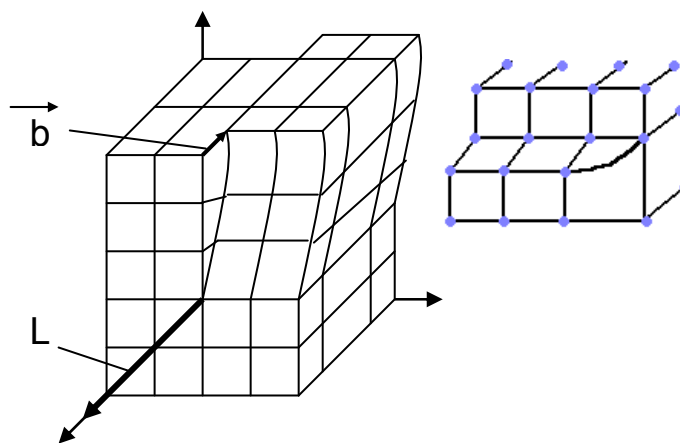


Рис. 3.2. Винтовая дислокация, обусловленная изгибом части решетки:

L – линия дислокации; \vec{b} – вектор Бюргера

Приложение нагрузки к образцу вызывает движение дислокаций. Наиболее легко движение краевой дислокации происходит вдоль плоскости скольжения и

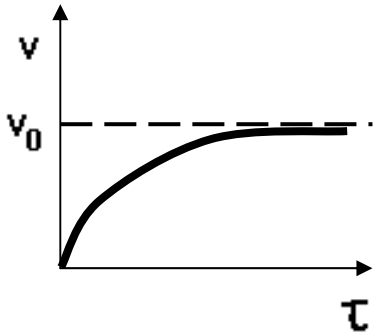


Рис. 3.3. Зависимость скорости дислокаций от напряжения

перпендикулярно экстраплоскости. Сила (точнее напряжение) Пайерлса, необходимая для реализации механизма **скольжения**, невелика и для ГЦК решетки составляет величину порядка 0,05 МПа. **Скорость движения дислокаций** при невысоких напряжениях мала, порядка 10^{-6} мм/с. Но с изменением температуры и напряжений скорость определяется теоретической зависимостью (рис. 3.3):

$$v = v_0 \cdot e^{-\frac{A}{T \cdot \tau}}, \quad (3.2)$$

где v , v_0 – скорость движения дислокаций и скорость распространения звука в металле соответственно; T – абсолютная температура в металле; τ – приложенное касательное напряжение.

Скольжение не сопровождается переносом массы и не обусловлено диффузионными перемещениями атомов и может происходить и при низких температурах. Однако перемещение дислокаций перпендикулярно плоскости скольжения происходит только диффузионным путем, или **переползанием**, причем процесс может идти только при повышенных температурах. Для винтовых дислокаций основным механизмом перемещения является **поперечное скольжение**.

Деление дислокаций на краевые и винтовые условно – в действительности дислокации являются **смешанными**, однако они могут быть разложены на указанные два вида дислокаций. В последние годы были обнаружены и более сложные малоподвижные дислокации: геликоидальная, призматическая, расщепленная, сидячая и др.

Для оценки энергии деформирования или потребного напряжения вводят параметр \vec{b} , называемый **вектором Бюргерса**. Учет энергетических затрат E осуществляется по следующей формуле:

$$E = \frac{\alpha \cdot G \cdot \vec{b}}{l}, \quad (3.2)$$

где α – коэффициент; G – модуль сдвига; \vec{b} – модуль вектора Бюргерса; l – длина линии дислокации.

Если во фронтальной плоскости (рис. 3.1) определить контур обхода, включающий проекцию плоскости скольжения, то невязка контура обхода дефектной зоны представляет собой **вектор Бюргерса** для краевой дислокации. Он перпендикулярен линии дислокации. Вектор Бюргерса винтовой дислокации показан на рис. 3.2. Он параллелен линии дислокации.

Дислокации возникают в процессе **кристаллизации** и **пластической деформации**, локализуются преимущественно по границам зерен и накапливаются в процессе пластической деформации. Возникновение дислокаций при кристаллизации объясняется наличием случайных дефектов при образовании

дендритной структуры. Наличие дислокаций и их взаимодействие с другими дефектами объясняет механизм упрочнения в металлах, которое зависит от **плотности дислокаций** – суммарной длины линий дислокаций в единичном объеме. В кристалле меди, приготовленном обычным способом, плотность дислокаций составляет 10^6 на кв. см. Отжигом ее удастся снизить до $(10^5 \dots 10^4)$ на кв. см. В особых условиях удастся вырастить кристалл с плотностью дислокаций порядка $(1 \dots 1,5)10^3$ на кв. см. Аналогичная ситуация имеет место и с другими металлами. Изменение плотности дислокаций приводит к существенному изменению свойств материалов.

При пластической деформации **накопление дислокаций** объясняется двумя моделями *Франка – Рида*:

1-я модель: одностороннее защемление линии дислокации и ее перемещение под действием внешней нагрузки. Перемещение линии влечет за собой возникновение новых дефектов-дислокаций.

2-я модель: двухстороннее защемление. Внешняя сила выгибает дислокацию и при вращении она порождает до 20-ти других дислокаций.

Имеется **три вида взаимодействия** дислокаций: а) взаимодействие с инородными (примесными) атомами; б) взаимодействие между собой – при пересечении, при встрече дислокаций разного знака (аннигиляция); в) взаимодействие стенок дислокаций.

2. Скольжение и двойникование – два преимущественных механизма пластической деформации. **Скольжение** реализуется посредством сдвига в параллельных плоскостях кристалла, отстоящих друг от друга на величину порядка 10^4 межатомных расстояний. Скольжение осуществляется в плоскостях с наибольшей плотностью атомов и в направлении наименьших межатомных расстояний. Преимущественные плоскости и направления для различных решеток при комнатной температуре:

Тип решетки	Плоскость	Направление
ГЦК	(1 1 1)	[1 0 1]
ОЦК	(1 1 0), (1 1 2), (1 2 3)	[1 1 1]
ГПУ	(0 0 0 1)	[1 0 0]

При повышенных температурах могут появляться дополнительные плоскости скольжения, например, $(10\bar{1}1)$ и $(10\bar{1}2)$ для ГПУ – решетки.

Двойникование – смещение атомов, расположенных в плоскостях, параллельных плоскости двойникования, на расстояния, пропорциональные их удалению от плоскости двойникования (рис. 3.4).

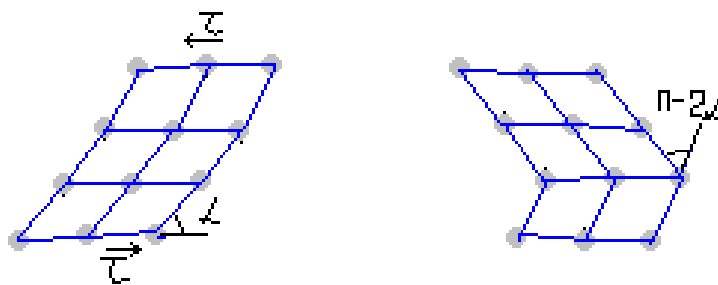


Рис. 3.4. Механизм двойникования

Преимущественные плоскости двойникования: ОЦК – [112], ГЦК – [111], ГПУ – [11 $\bar{1}$ 2]. Однако в ГЦК – кристаллах двойникование затруднено и для процесса формообразования не имеет практического значения. Для начала двойникования требуются напряжения порядка 30 МПа, а в дальнейшем процесс может идти при напряжениях около 5 МПа.

Механизм скольжения реализуется при пластической деформации со средними скоростями деформирования. **Механизм двойникования** имеет место при ударных нагрузках, а также при отжиге нагартованных материалов (сопровождается характерным потрескиванием, а деформация протекает скачкообразно).

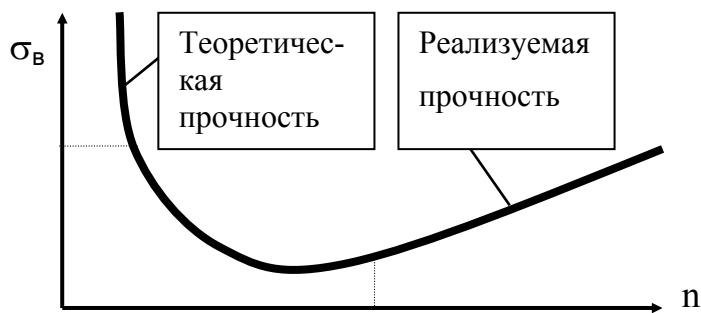


Рис. 3.5. Зависимость прочности металла от количества дефектов решетки «n»

На рис. 3.5 приведена диаграмма А. Бочвара, показывающая влияние количества несовершенств структурной решетки на прочностные характеристики материала.

На рис. 3.5 приведена диаграмма А. Бочвара, показывающая влияние количества несовершенств структурной решетки на прочностные характеристики материала.

3. При пластической деформации материала (например, при осадке цилиндрической заготовки или при одноосном растяжении) возникают плоскости скольжения, следы которых можно наблюдать на полированной поверхности. Эти линии названы именами ученых, впервые наблюдавших их, – **линиями Чернова – Людерса** (рис. 3.6).

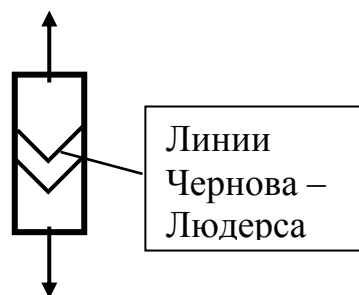


Рис. 3.6. Деформированная заготовка со следами линий скольжения

При наличии преимущественного направления деформирования со степенью деформации 30...50 % кристаллиты имеют удлиненную форму вдоль главной деформации, а макроструктура материала приобретает **волокнистость (полосчатость)**. Формирование волокнистой структуры сопровождается поворотом плоскостей скольжения, их ориентацией вдоль направления главной деформации, поликристаллическое тело приобретает

При наличии преимущественного направления деформирования со степенью деформации 30...50 % кристаллиты имеют удлиненную форму вдоль главной деформации, а макроструктура материала приобретает **волокнистость (полосчатость)**. Формирование волокнистой структуры сопровождается поворотом плоскостей скольжения, их ориентацией вдоль направления главной деформации, поликристаллическое тело приобретает

весьма ощутимую анизотропию свойств. При этом прочность и пластичность металла в направлении главной деформации увеличиваются, а в поперечном направлении – уменьшаются. Например, изгиб холоднокатанных листов вдоль направления прокатки приводит к разрушению при больших радиусах изгиба, чем изгиб поперек направления прокатки. Целенаправленное формирование анизотропных свойств материалов рассмотрено в работах Ю. М. Арышенского и Ф. В. Гречникова. При степенях деформации порядка 70...90 % плоскости скольжения (и кристаллографические оси) имеют преимущественную ориентацию вдоль главной деформации, что сопровождается появлением **текстуры** и

ярко выраженной анизотропии, в ряде случаев играющей отрицательную роль (например, фестонобразование при вытяжке).

Соответствующей термической обработкой **волокнистую структуру** можно устранить и вернуть материалу квазиизотропные свойства. В то же время **текстура** после термической обработки может исчезнуть, остаться неизменной или превратиться в текстуру рекристаллизации в зависимости от природы исходного материала.

Контрольные вопросы и упражнения

1. Назовите четыре типа дефектов в металлах.
2. Назовите точечные дефекты.
3. Назовите линейный дефекты.
4. Назовите поверхностные дефекты.
5. Назовите объемные дефекты.
6. Что вносит большее возмущение структуры: вакансии или межузельные атомы?
7. Укажите механизм образования вакансий.
8. Напишите формулу и поясните от каких факторов зависит концентрация вакансий. Как она зависит от температуры?
9. Что такое дислокация, когда и в связи с чем появилось это понятие?
10. Изобразите краевую дислокацию, объясните, чем она обусловлена.
11. Что такое экстраплоскость?
12. Дайте определение линии дислокации.
13. Как определяют ядро дислокации и каковы его размеры?
14. Как определяют положительные и отрицательные дислокации, изобразите оба вида на рисунке.
15. Изобразите плоскость скольжения на рисунке.
16. Изобразите винтовую дислокацию на рисунке, укажите на нем также вектор Бюргерса.
17. Укажите на рисунке направление наиболее легкого перемещения краевой дислокации.
18. Какова величина силы Пайрлса для ГЦК решетки, каков ее смысл?
19. Укажите скорость движения дислокаций при малых напряжениях.
20. Приведите теоретическую зависимость для скорости движения дислокаций и график. От каких факторов зависит эта скорость?
21. Каковы механизмы движения для краевых и винтовых дислокаций?
22. Назовите обнаруженные в последние годы сложные малоподвижные дислокации.
23. Запишите формулу энергии деформирования и поясните значения входящих в нее величин.
24. Как расположен вектор Бюргерса по отношению к линии дислокации для краевой и винтовой дислокаций?

25. При каких обстоятельствах возникают дислокации и чем это объясняется?
26. Дайте определение плотности дислокаций, укажите порядок этой величины для меди в исходном состоянии, после отжига, а также для выращенного кристалла.
27. Объясните две модели Франка-Рида накопления дислокаций.
28. Укажите три вида взаимодействия дислокаций.
29. Дайте определение механизма скольжения и укажите наиболее благоприятные условия реализации данного механизма, а также расстояние между параллельными плоскостями скольжения.
30. Укажите преимущественные плоскости и направления для трех основных видов решеток.
31. Влияет ли температура на появление дополнительных плоскостей скольжения? Дайте пример для ГПУ – решетки.
32. Дайте определение механизма двойникования и изобразите его в виде рисунка.
33. Укажите преимущественные плоскости двойникования в различных решетках, укажите вид решетки, для которой этот механизм не имеет практического значения.
34. Какова величина, необходимая для начала и поддержания процесса двойникования?
35. Каковы условия реализации механизмов скольжения и двойникования?
36. Изобразите кривую Бочвара и дайте необходимые пояснения.
37. Что такое линии Чернова – Людерса?
38. При каких деформациях возникает волокнистость структуры и в чем она проявляется?
39. При каких деформациях возникает текстура материала?
40. Каковы проявления анизотропии в обработке металлов давлением?

Лекция 4. Остаточные напряжения, особенности пластического деформирования и упрочнение материалов

=====

1. Остаточные напряжения. 2. Особенности пластического деформирования металлов. 3. Упрочнение при холодной деформации, кривые упрочнения, виды их аппроксимирующих зависимостей.

=====

1. Остаточными называются напряжения, которые возникают из-за неравномерности пластической деформации и остаются в теле после снятия внешних сил или устранения других причин, обусловивших неравномерную пластическую деформацию.

Различают **остаточные напряжения** трех родов:

- первого рода – возникающие между частями тела;

- второго рода – возникающие между зернами поликристалла;
- третьего рода – возникающие в зерне между группами атомов.

Остаточные напряжения **первого рода** – микроскопические зональные напряжения, охватывающие целые области деформируемого тела и имеющие ориентацию, связанную с его формой. Различная ориентация плоскостей скольжения в зернах поликристалла, а следовательно, и разная величина упругой деформации, соответствующей началу пластической деформации отдельных зерен, приводят при разгрузке к возникновению остаточных напряжений **второго рода**, не имеющих преимущественной ориентации в отличие от остаточных напряжений первого рода. Остаточные напряжения **третьего рода** возникают при взаимодействии субмикроскопических элементов деформируемого тела, в частности дислокаций, и связаны с направлениями кристаллографических осей зерен.

В большинстве случаев остаточные напряжения нежелательны, поскольку они **ухудшают** служебные свойства изделий: резко снижают коррозионную стойкость (из-за межкристаллитной коррозии), пластичность, ударную вязкость и предел выносливости. В частности, остаточные напряжения первого рода могут вызывать искажение формы (коробление) заготовки или детали. Совместно с действием внешних сил остаточные напряжения могут приводить к разрушению детали под нагрузкой, значительно меньшей, чем расчетная. Возможно также разрушение заготовок и без приложения внешних сил вследствие комбинации остаточных напряжений и температурных полей. Однако наличие **сжимающих остаточных напряжений** в поверхностном слое приводит к положительному эффекту – **повышению усталостной прочности**.

Для определения величины остаточных напряжений, направления их действия и знака применяют химические (травление образцов), механические (тензометрирование образцов при последующей разрезке детали) и рентгеновские методы (при использовании, например, установки ДРОН – 3).

2. Особенности пластической деформации состоят в следующем:

1. **Нарушение линейного соотношения** между напряжениями и деформациями выше предела текучести.

2. **Упругое последствие** – образец под постоянной нагрузкой до предела текучести с течением времени получает дополнительную деформацию, а после снятия внешних сил имеет некоторую остаточную деформацию, со временем уменьшающуюся или исчезающую, что объясняется взаимодействием «сильных» и «слабых» зерен при пробегах дислокаций.

3. **Релаксация напряжений** – с течением времени убывает сила (напряжение), необходимая для поддержания постоянной деформации образца, что объясняется направленным движением дислокаций в зернах с благоприятной ориентацией плоскостей скольжения, что приводит к уменьшению упругой деформации в полной деформации зерна, а следовательно, к уменьшению напряжения, необходимого для поддержания постоянной деформации.

4. **Упругий гистерезис** – несовпадение линий нагружения и разгрузки на диаграмме одноосного растяжения (площадь петли соответствует энергетическим

потерям при деформации) (рис. 4.1). Это явление объясняется тем, что при разгрузке уменьшение деформаций «сильных» зерен вначале снимает упругую деформацию «слабых» зерен, а затем создает в них упругую деформацию обратного знака, переходящую в пластическую при достаточной величине действующих напряжений.

5. **Эффект Баушингера** – понижение предела пропорциональности, упругости, текучести после нагружения образца напряжениями обратного знака (объясняется наличием остаточных напряжений) (рис. 4.2).

6. **Площадка текучести** является ярко выраженной лишь для пластичных материалов (наблюдается у некоторых цветных сплавов и отожженной низкоуглеродистой стали).

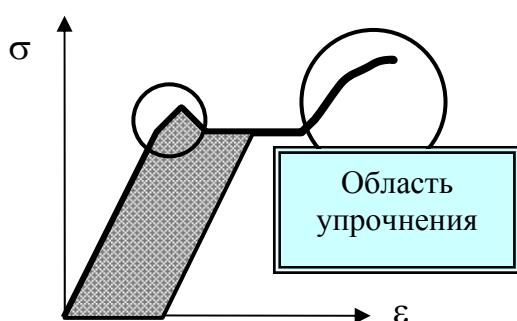


Рис. 4.1. Особенности холодного деформирования материалов

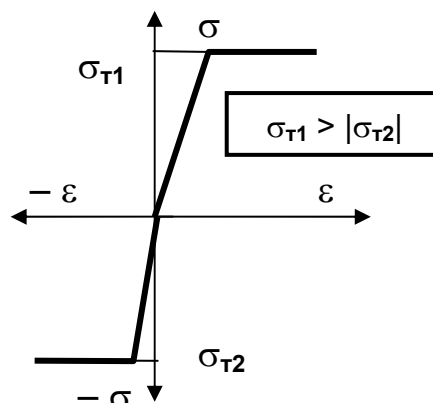


Рис. 4.2. Эффект Баушингера

7. **Наличие зубца** в начале площадки текучести (см. рис. 4.1) объясняется двумя гипотезами: 1. *Гипотеза* каркасной (скелетной) сетки Франка (по границам зерен и мозаичных блоков образуется достаточно прочная и хрупкая скелетная сетка. Пластической деформации оказывают сопротивление не только сами зерна, но и эта сетка. При больших напряжениях хрупкая сетка разрушается и последующее деформирование зерен требует меньших по величине напряжений). 2. *Гипотеза* Котрелла (до момента достижения пластического состояния существует некое облако примесных атомов, окружающих дислокации; их взаимодействие препятствует пластической деформации. При достижении критической нагрузки дислокации выходят из этого облака и протекание деформирования облегчается).

3. Совокупность явлений, связанных с изменением механических и физико-химических свойств металлов (пределов упругости, пропорциональности и текучести, а также прочности, твердости, относительного удлинения и сужения, ударной вязкости, электрического сопротивления, сопротивления коррозии, теплопроводности, магнитных свойств) в процессе пластической деформации, называется **упрочнением** (наклепом, нагартовкой) (см. рис. 4.1). Упрочнение при холодной деформации объясняется накоплением и блокировкой дислокаций. Например, окисленная граница зерен представляет собой непроходи-

мый барьер для движения дислокаций. Экспериментально установлено, что критическое касательное напряжение $\tau_{кр}$ связано с плотностью дислокаций ρ следующим образом:

$$\tau_{кр} = C \cdot \sqrt{\rho}, \quad (4.1)$$

где C – константа материала.

Плотность дислокаций связана с длиной их свободного пробега, в частности, в пределах размера зерна. Это подтверждается и известной формулой Хола-Петча для определения предела текучести σ_s :

$$\sigma_s = \sigma_{s0} + C \cdot d^{-\frac{1}{2}}, \quad (4.2)$$

где d – размер зерна; σ_{s0} – предел текучести металла после отжига; C – постоянные для данного материала.

В исходном отожженном состоянии металлы имеют малую плотность дислокаций и большой размер зерна. В результате деформации плотность дислокаций увеличивается, зерна дробятся на блоки и в соответствии с формулой (4.2) предел текучести возрастает. На рис. 4.3 представлены графики растяжения монокристалла и поликристалла цинка в отожженном состоянии, имеющих ГПУ-решетку, откуда видно значение упрочнения и роль дислокаций в деформировании.

Область упрочнения (см. рис. 4.1) представляется кривой, характерные точки которой могут быть соотнесены с некоторыми характеристиками материала. Такое соотнесение для произвольного напряженно-деформированного состояния (НДС) возможно, если принять так называемую **гипотезу «единой кривой»**: соотношение интенсивностей напряжений и деформаций при произвольном НДС аналогично диаграмме одноосного растяжения образца. Кривые упрочнения можно представлять в терминах обычных деформаций, в терминах относительного сужения шейки и в терминах логарифмических деформаций. Соответствующие кривые называют **кривыми упрочнения первого, второго и третьего вида** соответственно. В общем случае они являются функцией температуры и скорости деформации.

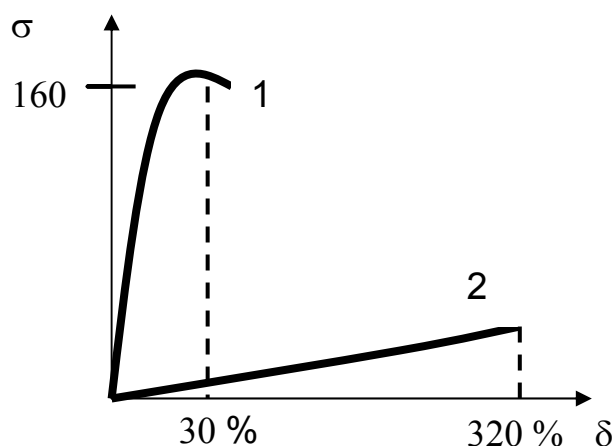


Рис. 4.3. Диаграммы растяжения образцов цинка: 1 – поликристалл; 2 – монокристалл

Кривая упрочнения первого вида. Усилие в любой момент деформации до появления шейки определяется соотношением

$$F = \sigma_s \cdot A, \quad (4.3)$$

где F – действующая сила; σ_s – предел текучести материала; A – площадь поперечного сечения образца.

$$F = \sigma_{\text{усл}} \cdot A, \quad (4.4)$$

где $\sigma_{\text{усл}}$ – некое критическое значение напряжения; A – площадь поперечного сечения образца в момент образования шейки.

Взяв полный дифференциал от соотношения (4.3), получаем:

$$dF = \sigma_s \cdot dA + A \cdot d\sigma_s. \quad (4.5)$$

В формуле (4.5) первый член отрицателен из-за уменьшения площади сечения, а второй – положителен вследствие упрочнения; на этапе равномерного удлинения первый член больше второго по абсолютной величине, а после образования шейки – наоборот. Приравнявая силы в формулах (4.3) и (4.4), получим:

$$\sigma_s = \frac{\sigma_{\text{усл}} A_0}{A}. \quad (4.6)$$

В момент образования шейки из формулы (4.6) следует:

$$\sigma_{\text{ш}} = \frac{\sigma_B \cdot A}{A_{\text{ш}}}, \quad (4.7)$$

где $\sigma_{\text{ш}}$, $A_{\text{ш}}$ – напряжение и площадь, относящиеся к моменту образования шейки; σ_B – предел прочности материала.

Из равенства объемов получаем:

$$A = \frac{A_0 \cdot l_0}{l} = \frac{A_0}{l_0/l_0 + \Delta l/l_0} = \frac{A_0}{1 + \varepsilon}. \quad (4.8)$$

Дифференцирование формулы (4.8) приводит к соотношению:

$$dA = \frac{A_0 \cdot d\varepsilon}{(1 + \varepsilon)^2}. \quad (4.9)$$

Возьмем приращение dF из формулы (4.5) в момент образования шейки $dF_{\text{ш}} = 0$ и, подставляя значения из соотношений (4.8) и (4.9), получим:

$$\frac{d\sigma_{\text{ш}}}{d\varepsilon_{\text{ш}}} = \frac{\sigma_{\text{ш}}}{1 + \varepsilon_{\text{ш}}} = \text{tg } \alpha, \quad (4.10)$$

где α – угол наклона касательной к кривой упрочнения.

Соотношение (4.10) представлено на рис. 4.4. Из подобия двух прямоугольных треугольников, имеющих общий угол α , и формул (4.7), (4.10) получаем:

$$\sigma_{\text{ш}} = \sigma_B \cdot (1 + \varepsilon_{\text{ш}}). \quad (4.11)$$

Теперь все параметры кривой первого вида представлены в терминах деформации удлинения образца до момента образования шейки.

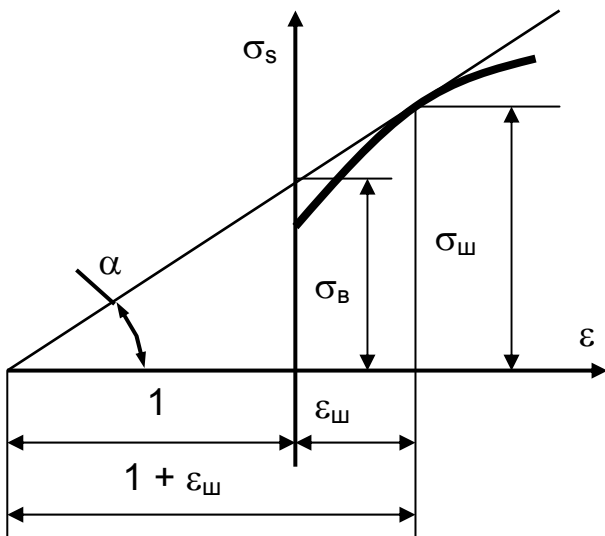


Рис. 4.4. Аппроксимация кривой упрочнения на диаграмме $\sigma_s - \varepsilon$

Кривая упрочнения второго вида. Представим теперь ту же кривую в терминах относительного сужения шейки образца ψ , которое определяют следующим образом:

$$\psi = \frac{A_0 - A}{A_0}. \quad (4.12)$$

Формула (4.12) дает соотношения, справедливые на момент образования шейки в образце:

$$A_{\psi} = (1 - \psi_{\psi}) \cdot A_0; \quad dA_{\psi} = -A_0 \cdot d\psi_{\psi}. \quad (4.13)$$

Взяв соотношение (4.5) в момент образования шейки и используя формулу (4.13), приходим к следующей зависимости:

$$\frac{d\sigma_{\psi}}{d\psi_{\psi}} = \frac{\sigma_{\psi}}{1 - \psi_{\psi}} = \operatorname{tg}\alpha. \quad (4.14)$$

Как и предыдущем случае, зависимость (4.14) имеет графическую интерпретацию в виде рис. 4.5. Из рассмотрения подобных треугольников, имеющих один и тот же угол α , следует, что при значении $\psi = 1$ значение ординаты равно $2\sigma_{\psi}$. Соотношение (4.14) дает обобщенное представление о кривой упрочнения, пригодное для использования его в численных расчетах при наличии полных диаграмм одноосного растяжения. Однако для аналитических моделей применяют аппроксимации кривых упрочнения: линейную и степенную. Линейная аппроксимация (замена реальной кривой отрезком касательной) может быть представлена функцией вида

$$\sigma_s = \sigma_{\tau_0} + \Pi\Psi, \quad (4.15)$$

где σ_{τ_0} и Π – константы, подлежащие определению.

Из рис. 4.4 и зависимости (4.14) следует:

$$\Pi = \operatorname{tg}\alpha = \frac{d\sigma_{\psi}}{d\psi_{\psi}} = \frac{\sigma_{\psi}}{1 - \psi_{\psi}}. \quad (4.16)$$

Комбинация соотношения (4.7) и первой из формул (4.13) дает:

$$\sigma_{\psi} = \frac{\sigma_B}{1 - \psi_{\psi}}. \quad (4.17)$$

Из формул (4.16) и (4.17) получаем:

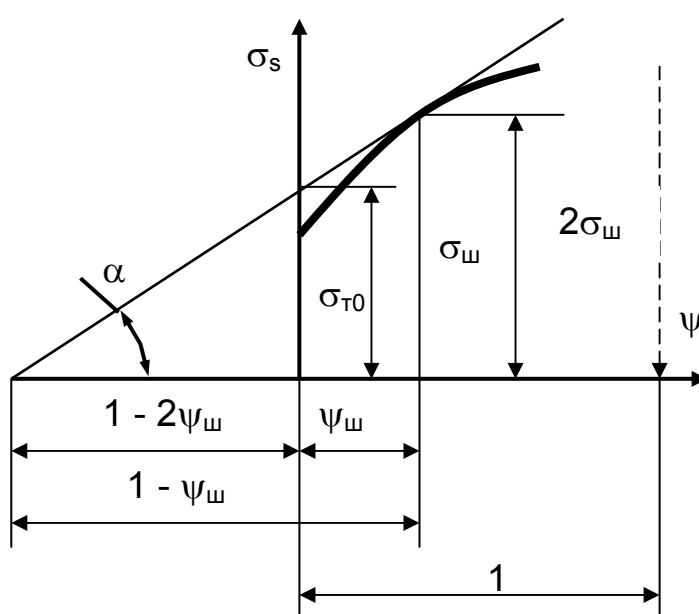


Рис. 4.5. Аппроксимация кривой упрочнения на диаграмме $\sigma_s - \psi$

$$\Pi = \frac{\sigma_B}{(1 - \psi_w)^2}. \quad (4.18)$$

Вторая константа легко находится по рис. 4.5, на котором видно, что

$$\Pi = \frac{\sigma_{T0}}{1 - 2\psi_w}, \quad (4.19)$$

откуда с учетом формулы (4.18) легко получить искомое выражение:

$$\sigma_{T0} = \frac{\sigma_B(1 - 2\psi_w)}{(1 - \psi_w)^2}. \quad (4.20)$$

Таким образом, формулы (4.15), (4.18) и (4.20) полностью определяют участок упрочнения аппроксимированной линии.

Степенная аппроксимация может быть представлена функцией:

$$\sigma_s = C \cdot \psi^n, \quad (4.21)$$

где C и n – постоянные, подлежащие определению.

В момент образования шейки выражение (4.21) принимает форму:

$$\sigma_w = C\psi_w^n. \quad (4.22)$$

Из формул (4.21) и (4.22) определяется следующая зависимость:

$$\sigma_s = \frac{\sigma_w \cdot \psi^n}{\psi_w^n}. \quad (4.23)$$

Из формул (4.3), (4.12) и (4.23) получим:

$$F(\psi) = \frac{\sigma_w}{\psi_w^n} \cdot \psi^n \cdot (1 - \psi) \cdot A_0. \quad (4.24)$$

Производя дифференцирование функции (4.24) и приравнявая производную нулю, получим выражение показателя степени через ψ_w :

$$n = \frac{\Psi_w}{1 - \Psi_w}. \quad (4.25)$$

Из формул (4.23), (4.17) и (4.25) получим окончательный вид степенной функции:

$$\sigma_s = \frac{\sigma_B}{1 - \Psi_w} \left(\frac{\Psi}{\Psi_w} \right)^{\frac{\Psi_w}{1 - \Psi_w}} \quad (\text{Формула С.И. Губкина}). \quad (4.26)$$

Из формулы (4.26) можно выделить значение константы C :

$$C = \frac{\sigma_B}{(1 - \Psi_w) \Psi_w^{\left(\frac{\Psi_w}{1 - \Psi_w}\right)}},$$

хотя она могла бы быть получена из формул (4.22), (4.17) и (4.25).

Формула Губкина (4.26) дает существенные погрешности при малых деформациях.

Кривая упрочнения третьего вида. На основании определения логарифмической деформации (см. лекц. 1) и условия постоянства объема, можно записать следующие соотношения:

$$e = \ln \frac{l}{l_0} = \ln \frac{A}{A_0}, \quad A = A_0 \cdot \exp(-e), \quad (4.27)$$

где e – логарифмическая деформация.

Подставляя вторую формулу из (4.27) в формулу (4.3), после дифференцирования последней и отнесения результата к моменту образования шейки (равенство производной нулю), получаем:

$$\frac{d\sigma_{ш}}{de_{ш}} = \sigma_{ш} = \operatorname{tg}\alpha. \quad (4.28)$$

Из подобия треугольников с углом α (рис. 4.6) следует, что отрезок, отсекаемый касательной на оси ординат, σ_0 определяется так:

$$\sigma_0 = \sigma_{ш} \cdot (1 - e_{ш}). \quad (4.29)$$

Тогда линеаризация участка упрочнения кривой диаграммы растяжения может быть представлена уравнением Шехтера (уравнением секущей):

$$\sigma_s = \sigma_0 + \frac{\sigma_{ш} - \sigma_0}{e_{ш}} \cdot e. \quad (4.30)$$

Если же кривую упрочнения заменить уравнением касательной в точке начала образования шейки, то это уравнение будет иметь вид:

$$\sigma_s = \sigma_0 + \Pi_3 \cdot e, \quad (4.31)$$

где Π_3 – модуль упрочнения, равный $\operatorname{tg}\alpha = \sigma_{ш}$ (см. рис. 4.5).

Преобразование уравнения (4.31) с учетом зависимости (4.29) и значения модуля упрочнения приводит к следующему конечному результату:

$$\sigma_s = \sigma_{ш} \cdot (1 - e_{ш} + e). \quad (4.32)$$

Степенная аппроксимация кривой упрочнения третьего вида может задаваться в форме

$$\sigma_s = A \cdot e^n, \quad (4.33)$$

где A , n – константы, подлежащие определению.

В момент образования шейки значение предела текучести равно $\sigma_{ш}$, следовательно, из уравнения (4.33) можно выразить константу « A » через « n », а из формул (4.28) и (4.33) определить « n »:

$$A = \frac{\sigma_{ш}}{e_{ш}^n}, \quad n = e_{ш}. \quad (4.34)$$

Из уравнений (4.33) и (4.34) получаем уравнение Холломона:

$$\sigma_s = \sigma_{ш} \cdot \left(\frac{e}{e_{ш}} \right)^{e_{ш}}. \quad (4.35)$$

Полученные аппроксимации кривых упрочнения применяются при решении задач ОМД аналитическими методами.

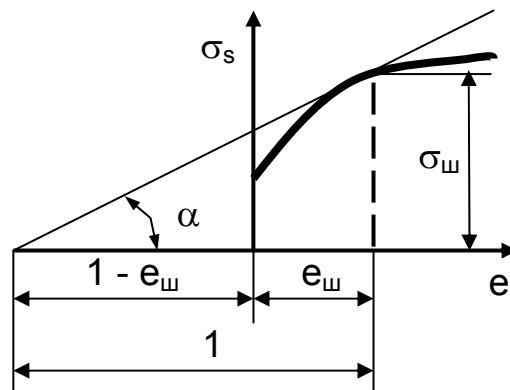


Рис. 4.6. Кривая упрочнения третьего вида

Контрольные вопросы и упражнения

1. Дайте определение остаточных напряжений.
2. Что такое остаточные напряжения первого рода и чем они обусловлены?
3. Дайте определение и укажите степень локализации остаточных напряжений второго рода.
4. На каком уровне возникают остаточные напряжения третьего рода и с чем они связаны?
5. Каково влияние остаточных напряжений на служебные характеристики изделий?
6. Каков положительный эффект остаточных напряжений и при каких условиях он реализуем?
7. Какие методы используют для определения остаточных напряжений?
8. В чем заключается явление упругого последействия?
9. Дайте объяснение явления релаксации напряжений.
10. Изобразите на диаграмме упругий гистерезис и дайте пояснение этого феномена.
11. Нарисуйте диаграмму, иллюстрирующую эффект Баушингера. Дайте пояснения этого эффекта.
12. У всех ли металлов имеется площадка текучести?
13. Нарисуйте диаграмму одноосного растяжения и объясните суть гипотез относительно наличия зубца в начале площадки текучести.
14. Дайте определение упрочнения, приведите другие названия этого явления. 15. Чем объясняется явление наклепа?
16. Как связано критическое касательное напряжение с плотностью дислокаций?
17. Какие величины связывает формула Хола-Петча, в чем ее суть?
18. Нарисуйте диаграммы одноосного растяжения для моно- и поликристалла цинка. Чем объясняется такое различие в поведении кривых?
19. В чем суть гипотезы «единой кривой»?
20. Чем различаются кривые упрочнения трех видов?
21. Как соотносится сила и напряжение (критическое напряжение и предел текучести) при одноосном растяжении?
22. Напишите соотношение, устанавливающее взаимное влияние утонения образца и наклепа, дайте пояснения.
23. Приведите расчетные и графические зависимости для кривой упрочнения первого вида.
24. Дайте определение относительного сужения шейки.
25. Запишите дифференциальное соотношение для напряжения и сужения шейки и дайте его геометрическую интерпретацию.
26. Запишите исходное уравнение линейной аппроксимации сопротивления деформации для кривой упрочнения второго вида.
27. Из каких соображений и как находят неизвестные константы для этой кривой? Дайте их вывод.

28. Запишите исходное уравнение степенной аппроксимации для кривой упрочнения второго вида.
29. Как определяются константы для данной модели. Сделайте вывод.
30. Запишите формулу Губкина и поясните роль входящих величин.
31. В терминах каких величин представляется кривая упрочнения третьего вида?
32. Запишите дифференциальное соотношение для входящих величин кривой упрочнения третьего вида. Дайте геометрическую интерпретацию и пояснения.
33. Напишите уравнение Шехтера, поясните его суть.
34. Запишите уравнение касательной в точке начала образования шейки кривой третьего вида.
35. Дайте вывод уравнения Холломона.

Раздел 2. ВЛИЯНИЕ ТЕМПЕРАТУРЫ И СКОРОСТИ

Лекция 5. Явления возврата и рекристаллизации

=====

1. Явление возврата. 2. Явление рекристаллизации. 3. Виды деформации по отношению к температурному режиму. 4. Влияние температуры на механические показатели металла.

=====

Нагрев с последующим охлаждением деформированных металлов влечет изменения, связанные с упорядочением структурной решетки, уменьшением количества дефектов, и обуславливают разупрочнение металлов. Причинами этих изменений являются возврат и рекристаллизация.

1. Возврат – процесс упорядочения кристаллической решетки деформированных металлов при их нагреве и охлаждении, приводящий к изменению **субструктуры** металлов. Среди дефектов, обуславливающих упрочнение материалов, наибольшее значение имеют точечные и линейные дефекты, обладающие наибольшей подвижностью. Упорядочение решетки происходит в пределах субзерен **без структурных изменений**. Возврат, имеющий место при температурах $(0,2...0,3)T_{пл}$ ($T_{пл}$ – температура плавления), принято разделять на две стадии:

а) **Отдых** – нагрев до $T \approx 0,2T_{пл}$, выдержка и последующее охлаждение. Механизм \Rightarrow уменьшение количества точечных дефектов, равновесная концентрация избыточных вакансий, межузельные атомы занимают места вакансий, дислокации противоположных знаков аннигилируют. Результат \Rightarrow механические свойства изменяются незначительно, а физические (напр., электропроводность, зависящая существенно от концентрации точечных дефектов) – значительно;

б) **Полигонизация** – нагрев до температуры $0,2T_{пл} < T < 0,3T_{пл}$, выдержка и последующее охлаждение.

Механизм \Rightarrow увеличение подвижности дислокаций и образование ими устойчивых конфигураций с малой внутренней энергией решетки (образование **стенок дислокаций**), снижение концентрации вакансий, уменьшение плотности дислокаций, формирование областей, почти свободных от дислокаций. Результат \Rightarrow существенное изменение механических и физических свойств: снижаются твердость и предел текучести, повышаются пластичность, уменьшается электрическое сопротивление.

Общая характеристика возврата при температурных и механических воздействиях: 1. Увеличение пластичности. 2. Наличие упрочнения при температуре возврата. 3. Размер зерен не изменяется, отсутствуют препятствия образованию текстур. 4. С уменьшением времени выдержки температура возврата увеличивается. 5. С повышением скорости деформации явление возврата уменьшается (при большой скорости деформации явление возврата не успевает происходить). 6. Увеличение сопротивления коррозии. 7. Уменьшение возможности растрескивания (характерно для латуни и алюминиевых сплавов, напр. 01420) за счет снижения остаточных напряжений и уменьшения межкристаллитной коррозии. 8. Для некоторых сплавов (напр., В95) наблюдается процесс **старения** при температуре возврата (*два механизма старения*: 1. выпадение мелкодисперсных частиц карбидов по плоскостям скольжения; 2. затруднение движения дислокаций «облаками» примесных атомов).

2. Рекристаллизация – процесс образования новых равноосных зерен вместо ориентированной волокнистой структуры деформированного металла под воздействием температуры. А. Бочвар установил, что рекристаллизация начинается при $T_p \approx 0,4T_{пл}$ (хотя для химически чистых металлов – при $(0,1 \dots 0,2)T_{пл}$, для сплавов – $(0,5 \dots 0,6)T_{пл}$, для гетерофазных сплавов – около $0,8 T_{пл}$). При рекристаллизации происходит перегруппировка и обмен местами атомов, а преимущественным механизмом рекристаллизации является диффузия. Закон диффузии устанавливается первым законом Фика:

$$m = -D \cdot \frac{dC}{dx}, \quad (5.1)$$

где m – количество вещества, перемещающегося через единичную площадку за единицу времени; D – коэффициент диффузии; C – концентрация вещества; x – текущая координата.

Коэффициент диффузии сильно зависит от температуры и природы металла:

$$D = D_0 \cdot \exp(-Q/RT), \quad (5.2)$$

где D_0 , Q – константы для данного металла; R – постоянная Больцмана.

Для частного случая, e.g., γ – железа $D_0 = 0,58 \cdot 10^4 \text{ м}^2/\text{с}$; $Q = 284,3 \text{ кДж/моль}$; $R = 8,31 \text{ Дж/(моль} \cdot \text{К)}$. При этих данных увеличение температуры от **20 до 100 °С** и от **20 до 500 °С** приводит к увеличению значения **D** в 10^3 и в 10^{42} раз соответственно.

Различают три стадии рекристаллизации: первичную, собирательную и вторичную.

а) **Первичная рекристаллизация** – процесс образования устойчивых зародышей, из которых растут новые неискаженные зерна. Зародыши новых зерен появляются на границах зерен и субзерен, причем для дальнейшего роста зерна размер зародыша должен превышать некоторый критический размер d_0 (рис. 5.1).

б) **Собирательная рекристаллизация** – перестройка кристаллической структуры из неустойчивого равновесия в устойчивое равновесие с равноосной структурой зерен. Процесс начинается при $T > 0,4T_{пл}$. Рост зерен ограничивается их диаметром d_p . Диаграммы собирательной рекристаллизации при различных температурах приведены на рис. 5.1. Наличие пластической деформации при нагреве влияет на размеры зерна в соответствии с трехмерными диаграммами рекристаллизации С. Чохральского (рис. 5.2).

в) **Вторичная рекристаллизация** – рост зерен за счет их интенсивного слияния. Чрезмерный рост зерна приводит к существенному снижению механических и других служебных свойств материала.

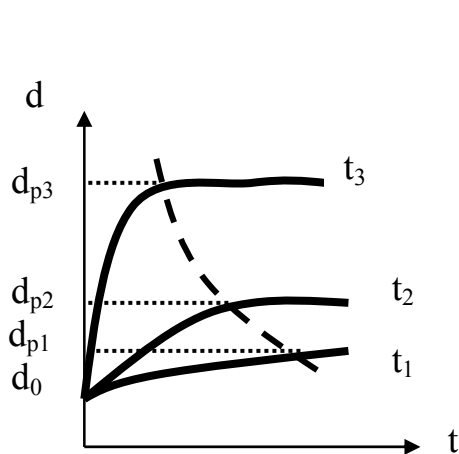


Рис. 5.1. Кинетические кривые роста зерна

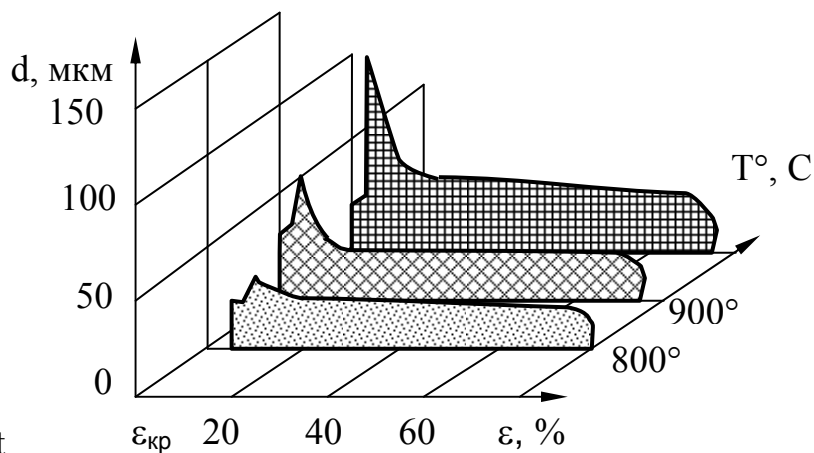


Рис. 5.2. Диаграмма рекристаллизации Чохральского

Общая характеристика рекристаллизации при температурных и механических воздействиях: 1. Одновременно могут идти процессы рекристаллизации и упрочнения. 2. С повышением температуры и степени деформации скорость рекристаллизации увеличивается. 3. Наличие примесей повышает температуру рекристаллизации. 4. Температура начала рекристаллизации выше ее составляющих, хотя температура плавления ниже. 5. Размеры равноосных зерен зависят от степени деформации и температуры, и в малой степени зависят от скорости деформации. 6. Наличие зубца на графиках приходится на величину деформации 8 – 10% (критические степени деформации). В докритической зоне имеется малое число центров рекристаллизации, а при критической степени деформации начинает разрушаться межкристаллитное вещество (дробление зерен) и увеличивается число центров рекристаллизации. С повышением температуры при той же степени деформации происходит интенсивный рост зерен (слияние) – собирательная рекристаллизация. 7. С увеличением времени

выдержки, собирательная рекристаллизация увеличивается. 8. С увеличением степени деформации температура рекристаллизации понижается (объясняется накопленной энергией в процессе деформирования). 9. После холодного деформирования термообработка приводит к тому, что величина зерна является функцией степени деформации, температуры рекристаллизации и времени выдержки. Текстура рекристаллизации может исчезать, изменяться или оставаться неизменной, что зависит от состава материала, степени деформации, температуры термообработки и времени выдержки. В отдельных случаях текстура рекристаллизации может приводить к возникновению анизотропии.

Виды рекристаллизации, изменение свойств и размеры зерна представлены на рис. 5.3.

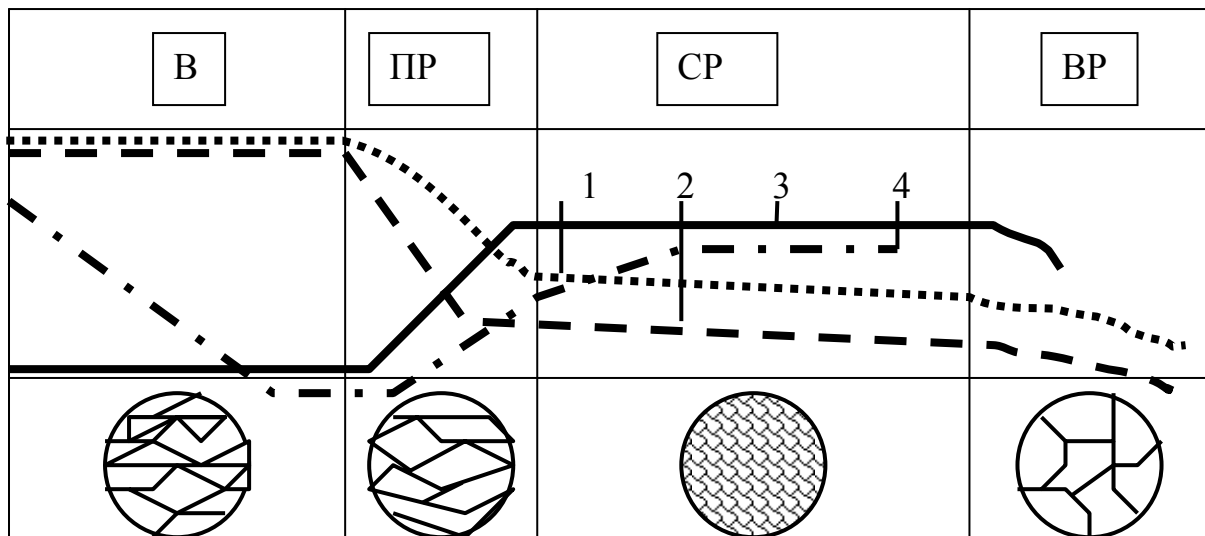


Рис. 5.3. Изменение механических свойств и структуры материала:

В – возврат; ПР, СР, ВР – первичная, собирательная и вторичная рекристаллизация; 1, 2, 3, 4 – графики изменения прочности, предела текучести, относительного удлинения и электросопротивления

3. Различают следующие виды деформации по отношению к температурному режиму: 1. Холодная пластическая. 2. Неполная холодная. 3. Неполная горячая. 4. Горячая.

- 1. Холодная деформация** – деформация, не сопровождающаяся разупрочнением и происходящая при относительно низких температурах (ниже температуры возврата, например, для свинца – $(100 \div 150)^\circ\text{C}$ □□ для вольфрама – $(450 \div 800)^\circ\text{C}$).
- 2. В неполной холодной** обработке (при $T \approx (0,3 \dots 0,5)T_{\text{пл}}$) имеет место упрочнение (неполное), с одновременным возвратом, кристаллизация практически отсутствует, наблюдается полосчатость микроструктуры, а при значительной деформации возникает текстура. При температурах выше температуры возврата, возврат может полностью происходить при вполне определенной скорости деформации.

3. В **неполной горячей** деформации (при $T \approx (0,5...0,7)T_{пл}$) имеет место возврат и рекристаллизация (две фазы). При температуре больше температуры рекристаллизации и при повышенных скоростях имеет место неравномерность деформации, что может приводить к остаточным напряжениям. У алюминиевых и магниевых сплавов скорость рекристаллизации низкая, поэтому их следует деформировать при малых скоростях деформации.
4. **Горячая деформация** (при $T > 0,7T_{пл}$) – происходит залечивание дефектов, дробление межкристаллитных прослоек, полная рекристаллизация, образуется равноосная зеренная структура без следов упрочнения.

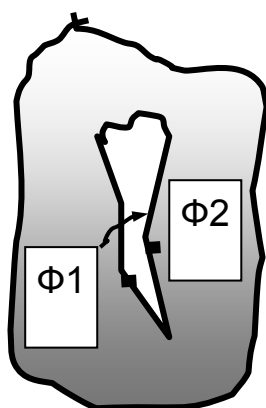


Рис. 5.5. Растворно-осадительный механизм

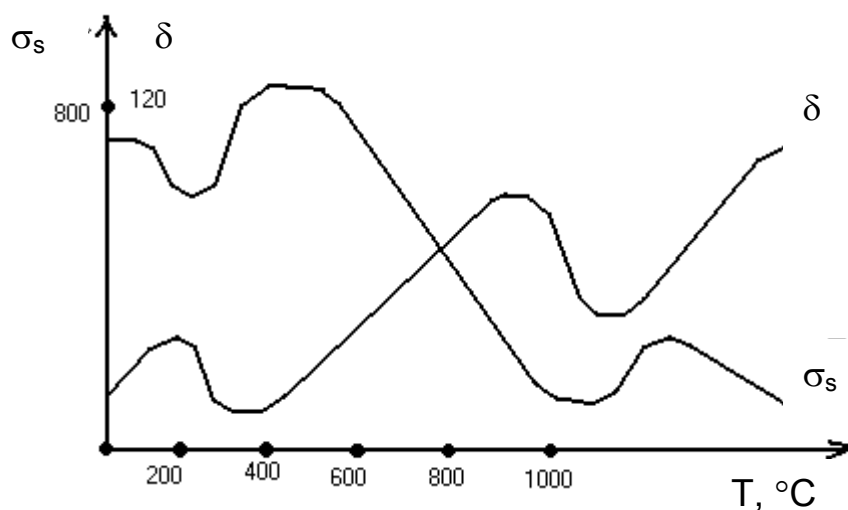


Рис. 5.4. Зависимость предела текучести σ_s и относительного удлинения δ от температуры

4. Особенности деформирования при нагреве (рис. 5.4):

1. При температуре до 100°C пластичность растет, а прочность уменьшается.
2. При температуре 300°C в графиках наблюдается провал (зона выпадения карбидов по плоскостям скольжения – зона синеломкости).
3. При температуре рекристаллизации пластичность максимальная.
4. При температуре до 1000°C имеется 2 фазы: рекристаллизованная и нерекристаллизованная. Предел текучести уменьшается в 10 раз.
5. При температурах несколько ниже температуры плавления наблюдается резкое уменьшение пластичности из-за роста зерна и пережога.
6. Опасные зоны:
 - а) старение и синеломкость;
 - б) зона фазовых превращений.
7. Залечивание микротрещин при горячем деформировании: переход атомов кристаллитов одной фазы на кристаллиты другой фазы. Это так называемый растворно-осадительный механизм по А. А. Бочвару (рис. 5.5).

Недостатки горячей обработки:

1. Трудность соблюдения режим нагрева для заготовок малой массы (до 1 кг).

2. Появление окалины на поверхности и обезуглероживание поверхности (что требует назначения припуска \Rightarrow механическая обработка).
3. Усложнение технологии и особые требования к процессу.

Контрольные вопросы и упражнения

1. Дайте определение возврата.
2. Какие дефекты играют основную роль в упрочнении металла?
3. При каких температурах имеет место явление возврата?
4. При какой температуре имеет место отдых?
5. Каков механизм явления отдыха?
6. Как изменяет отдых механические и физические характеристики материала?
7. При каких температурах происходит полигонизация?
8. Каков механизм полигонизации?
9. Как изменяются механические и физические характеристики материала в результате полигонизации?
10. Перечислите 8 пунктов характеристики возврата.
11. Может ли иметь место упрочнение при обработке металла при температуре возврата?
12. Что происходит с зерном при температуре возврата?
13. Как связаны время выдержки и температура возврата?
14. Как влияет скорость деформации на протекание возврата?
15. Каково влияние возврата на коррозионные характеристики материала?
16. Чем объясняется уменьшение возможности растрескивания металла после возврата?
17. Объясните два механизма (две гипотезы) явления «старения».
18. Дайте определение явления рекристаллизации.
19. При каких температурах имеет место рекристаллизация? Укажите температуры рекристаллизации для химически чистых металлов, сплавов и гетерофазных сплавов.
20. Запишите первый закон Фика и поясните значения входящих величин.
21. От каких величин и как зависит коэффициент диффузии?
22. Дайте определение первичной кристаллизации, где она начинается, при каком условии?
23. Дайте определение собирательной рекристаллизации и укажите температуру начала данного процесса.
24. Нарисуйте диаграмму рекристаллизации Чохральского и дайте пояснения по ней.
25. Нарисуйте кинетические кривые роста зерна при различных температурах.
26. Укажите механизм вторичной рекристаллизации и ее следствия.
27. Как влияет температура и степень деформации на скорость рекристаллизации?

28. В каком соотношении находится температура начала рекристаллизации сплава и его составляющих?
29. От каких факторов зависит размер зерна?
30. Чем объясняется наличие зубца на диаграмме одноосного растяжения?
31. Как влияет время выдержки на ход процесса рекристаллизации?
32. Как взаимосвязаны степень деформации и температура рекристаллизации?
33. От чего зависит величина зерна после термообработки холоднодеформированного образца?
34. От каких факторов зависит изменение текстуры материала после термообработки?
35. Нарисуйте графики изменения механических и физических свойств материала по стадиям возврата и рекристаллизации.
36. Дайте характеристику холодной деформации.
37. При какой температуре происходит неполная холодная обработка и чем она характеризуется?
38. Охарактеризуйте неполную горячую деформацию и укажите преимущественную температуру ее осуществления.
39. При каких температурах осуществляется горячая деформация и какими явлениями она сопровождается?
40. Нарисуйте диаграмму изменения предела текучести и относительного удлинения в зависимости от температуры.
41. Объясните явление синеломкости, при какой температуре она возникает?
42. При какой температуре пластичность достигает максимального значения?
43. При каких температурах имеет место пережог и что физически он означает?
44. Нарисуйте схему и дайте объяснение механизма залечивания микротрещин.
45. В чем состоят недостатки горячей обработки металлов?

Лекция 6. Влияние скорости деформации на пластичность и сопротивление деформированию. Сверхпластичность и специальные способы ОМД

=====

1. Влияние скорости деформации на прочность и сопротивление деформированию. 2. Сверхпластичность: ее природа, признаки существования и использование. 3. Специальные способы ОМД.

=====

1. Сопротивление деформации (напряжение текучести) σ_s в самом общем виде зависит от ряда факторов: физико-химических свойств материала, температуры, степени деформации и скорости деформации. Зависимость σ_s от температуры устанавливается законом Курнакова:

$$\sigma_s = \sigma_{пл} \cdot \exp[m(T_{пл} - T)] \quad (6.1)$$

где $\sigma_{пл}$ – сопротивление деформации при температуре плавления; m – константа материала.

М.А. Зайков исследовал зависимость (6.1), подтвердил ее справедливость, однако установил, что на величины $\sigma_{пл}$ и m сильно влияют химический состав сплава, степень и скорость его деформации. Частные зависимости σ_s от скорости деформации установлены экспериментально П. Людвиком и А. Рейто для холодной, неполной холодной деформации и неполной горячей и горячей деформации соответственно:

$$\sigma_s = \sigma_{s0} + n \cdot \ln \frac{\dot{\varepsilon}}{\dot{\varepsilon}_0} \quad (\text{закон П. Людвика}), \quad (6.2)$$

$$\sigma_s = \sigma_{s0} \cdot \left(\frac{\dot{\varepsilon}}{\dot{\varepsilon}_0} \right)^m \quad (\text{закон А. Рейто}), \quad (6.3)$$

где σ_s , σ_{s0} – сопротивление деформации при скоростях деформации $\dot{\varepsilon}$ и $\dot{\varepsilon}_0$ соответственно; n , m – константы, определяемые экспериментально.

Известны также обобщения формул (6.3) Л. А. Шофманом с помощью мультипликативно-экспоненциальной зависимости и В. И. Зюзиным в форме мультипликативной модели, однако и эти модели основаны на экспериментальных данных и лишь в незначительной степени улучшают ранее существовавшие модели. О влиянии скорости деформации на напряжение текучести можно судить по графикам рис. 6.1.

В обобщенном виде **закономерности изменения механических параметров** от скорости деформации можно резюмировать в следующем виде:

1. С повышением скорости деформации обычно предел текучести повышается, а относительное удлинение понижается (у магниевых и медных сплавов, а также у высоколегированных сталей). Алюминиевые сплавы, низкоуглеродистые и конструкционные стали **нечувствительны** к скорости деформации. Если скорость деформации неизменна, то имеет место квазиизотермический процесс; при больших скоростях возможно возникновение теплового эффекта. Процесс дефор-

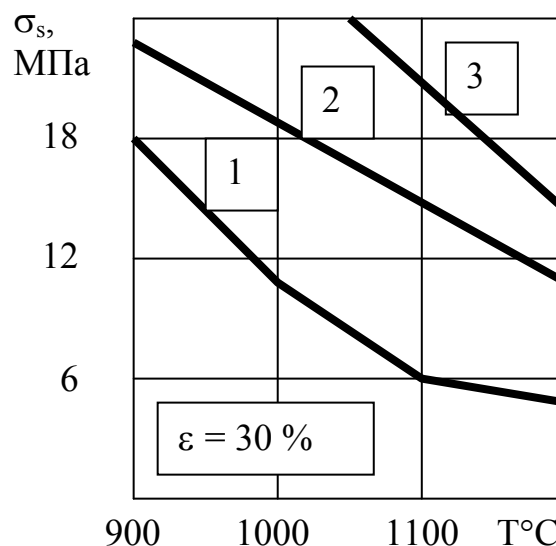


Рис. 6.1. Зависимость σ_s от скорости деформации: 1, 2, 3 – при скорости деформации 0,05; 7,5 и 150 1/с соответственно

мирования может сопровождаться явлениями возврата и рекристаллизации.

2. С увеличением скорости деформации, скорость рекристаллизации уменьшается, что приводит к увеличению σ_s и уменьшению δ .
3. Особый эффект: у технически чистого железа в зоне температуры от 825 до 1100 °С имеется **зона охрупчивания**, поэтому при обработке следует назначать режимы скорости деформации таким образом, чтобы при температурах ниже 825 °С не появлялся тепловой эффект, а при температурах ниже 1100 °С появление теплового эффекта желательно.
4. При слишком больших скоростях деформации (магнитно-импульсная штамповка, штамповка взрывом) относительное удлинение у цветных металлов, углеродистых и легированных сталей стремится к бесконечности.

2. Конструирование и технология всегда находятся в противоречии: чем выше требования к прочности конструкций, тем труднее обрабатывать элементы этой конструкции. Основная задача заключается в повышении пластичности. Один из специальных подходов к решению этой задачи – использование эффекта сверхпластичности. Внешние проявления **сверхпластичности** состоят в следующем:

$$\frac{\sigma_s}{\sigma_s^{СП}} \Rightarrow 100 \dots 1000; \frac{\delta^{СП}}{\delta} \Rightarrow 100,$$

где верхний индекс «СП» относится к сверхпластическому состоянию.

Механизм деформирования при сверхпластичности реализуется путем вакансионной и дислокационной ползучести, а также межкристаллитной деформации. Первый механизм реализуется при малых скоростях деформации (порядка $10^{-5} \dots 10^{-4}$ 1/с) и характерен для полиморфных металлов и сплавов (например α - и γ -железо). Практический интерес представляет второй механизм.

Условия, необходимые для реализации режима сверхпластичности:

1. Определенный состав (эвтектоидные сплавы, сплавы на основе алюминия, цинка, магния, меди, хрома, титана, никеля, железа – всего 66 различных сплавов).
2. Структура материала (размеры зерна должны быть порядка 1 – 2 мкм). У традиционных материалов размер зерна составляет от 10 до 100 мкм и более. Мелкое зерно получают дроблением зерен в холодную со степенями деформации более 50 %.
3. Режимы деформирования (температурный – температура фазовых превращений, полиморфные превращения, температура плавления).
4. Скорость нагрева заготовки должна быть высокой (200-300 °С в секунду), что обеспечивает отсутствие собирательной рекристаллизации, а следовательно, сохранение мелкозернистой структуры.
5. Характеристики δ и σ_s весьма слабо зависят от степени деформации.
6. Назначение скоростей деформирования.

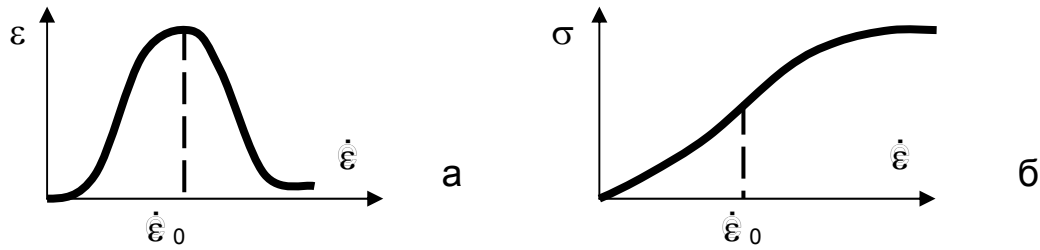


Рис. 6.2. Выбор скорости деформации при сверхпластичности

На рис. 6.2-а видно, что при скоростях меньше оптимальной доминируют процессы разупрочнения; рост зерна приводит к затруднению скольжения зерен друг относительно друга. При больших скоростях имеет место упрочнение, интенсифицируется процесс диффузии. Из рис. 6.2-б ясно, что в области оптимальной скорости деформации изменение сопротивления деформированию максимально.

Технологические приложения сверхпластичности:

1. Куполообразные и коробчатые детали (для деформации листов толщиной до 2 мм возможно применение сжатого воздуха давлением не более 0,6...0,8 МПа).
2. Крупногабаритные детали (типа сотовых панелей).
3. Матрицы, пуансоны, фрезы, зенкеры, развертки (быстрорежущие инструментальные стали).
4. Детали, требующие при изготовлении больших степеней деформации.

3. Среди **специальных способов** ОМД, кроме режима сверхпластичности, различают формообразование под высоким давлением и формообразование при циклическом нагружении.

Формообразование под высоким давлением предполагает приложение дополнительного давления к основному. Как было установлено опытами П. Бриджмена и Т. Кармана, всестороннее сжатие не влияет на наступление пластичности, но влияет на механизм деформации. При деформации под давлением имеют место следующие **явления**: 1. Плотность дислокаций уменьшается. 2. Линии дислокаций спрямляются, клубки дислокаций слабо выражены и немногочисленны. 3. Облегчается процесс переползания дислокаций вследствие образования ими стенок (барополигонизация – предотвращение скопления дислокаций и образования микротрещин). 4. Сближение берегов микротрещин, появление мостков схватывания и залечивание микротрещин.

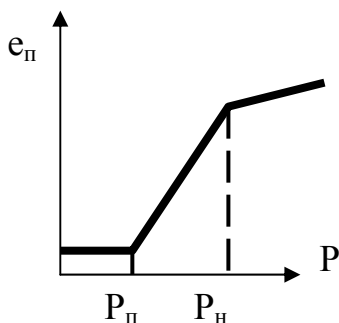


Рис. 6.3. Диаграмма предельной пластичности

На рис. 6.3 показано изменение предельной пластичности от внешнего давления. На графике ярко выражены точки порогового давления P_n и давления насыщения P_n , хотя они и характерны не

для всех металлов. У пластичных металлов (алюминий, латунь, железо) пороговое давление мало и практически не обнаруживается при испытаниях. У малопластичных металлов пороговое значение давления велико, а давление насыщения обнаружено только у некоторых металлов (например, у вольфрама $P_n = 2800$ МПа). При осадке цилиндрических образцов из стали 45 в обоймах из пластичного материала разрушение образцов наступало при деформации в 60%, в то время как при обычной осадке такие образцы разрушались при деформации в 2%. В последние годы это явление успешно применяется при прессовании в оболочках, в штамповке и прессовании с противодавлением, при чистовой вырубке, резке прутков с осевым подпором и др.

Формообразование при циклическом нагружении снижает потери на трение (в традиционных технологиях волочения проволоки потери достигают 30...42 %, а при осадке без смазки – 50 %). Все процессы циклического деформирования делятся на **пульсирующее деформирование** (с частотой до 10 Гц), **вибрационное деформирование** (с частотой от 10 до 16 000 Гц, промышленный диапазон – от 10 до 300 Гц) и **деформирование в ультразвуковом поле** (более 16 000 Гц). Пульсирующее деформирование применяют преимущественно при ковке на молоте. Вибрационное деформирование – для волочения, вырубке-пробивки, зачистки, вытяжки. Из-за технических трудностей подвода к заготовке ультразвуковых колебаний деформирование в ультразвуковом поле практически не применяется, хотя доказано, что, например, при прессовании ультразвук снижает коэффициент трения в 2...8 раз.

Эффекты циклического нагружения: 1. Снижение шероховатости поверхности на 1 – 2 класса. 2. Разупрочнение. 3. Снижение остаточных напряжений второго рода. 4. Уменьшение коэффициента трения.

Контрольные вопросы и упражнения

1. От каких факторов зависит сопротивление деформации?
2. Запишите закон Курнакова и дайте пояснение входящим величинам.
3. Запишите закон Людвига и поясните значения входящих величин.
4. В каком диапазоне температур хорошо работает закон Людвига?
5. Напишите формулу Рейто, поясните смысл входящих величин.
6. В каком диапазоне хорошо работает закон Рейто?
7. Изобразите графическую зависимость сопротивления деформации от температуры и скорости деформации.
8. Как изменяются предел текучести и относительное удлинение с повышением скорости деформации?
9. Какие материалы нечувствительны к скорости деформации?
10. Что понимается под тепловым эффектом?
11. Как влияет скорость деформации на скорость рекристаллизации.
12. В каком диапазоне температур у чистого железа имеется зона охрупчивания?

13. Какие режимы нагрева следует назначать, чтобы не попасть в зону охрупчивания?
14. Как изменяется относительное удлинение при магнитно-импульсной штамповке и штамповке взрывом?
15. В чем состоят внешние проявления сверхпластичности?
16. Каким путем реализуется механизм деформирования при сверхпластичности?
17. При каких скоростях деформации реализуется механизм вакансионной и дислокационной ползучести?
18. Какие материалы и сплавы подвержены режиму сверхпластичности?
19. Каков должен быть размер зерен и как его получают для целей формообразования металлов в режиме сверхпластичности?
20. Какова должна быть температура для реализации режима сверхпластичности?
21. Какова должна быть скорость нагрева при сверхпластичности и что она обеспечивает?
22. Как зависят относительное удлинение и сопротивление деформации от степени деформации при осуществлении режима сверхпластичности?
23. Изобразите графики выбора скорости деформации и поясните их суть. 24. Укажите предпочтительные сферы использования режима сверхпластичности.
25. Какие явления имеют место при формообразовании под высоким давлением?
26. Как изменяется предельная пластичность в зависимости от давления (нарисуйте диаграмму)?
27. Нарисуйте диаграмму предельной пластичности и дайте пояснения по пороговому давлению и давлению насыщения для различных металлов.
28. Каковы результаты осадки образцов при наличии дополнительного давления и без него?
29. Укажите операции ОМД, где применяют высокие дополнительные давления.
30. Как влияет на трение циклическое нагружение в процессах волочения проволоки и осадки без смазки?
31. Как подразделяются процессы циклического деформирования (указать диапазоны частот)?
32. Укажите области применения пульсирующего и вибрационного деформирования.
33. Как влияет ультразвук на коэффициент трения, где он находит применение?
34. Укажите эффекты циклического нагружения.

Раздел 3. НАПРЯЖЕНИЯ
Лекция 7. Теория напряжений

=====

1. Внешние силы и напряжения. Понятие о тензорном исчислении.
 2. Напряжения на наклонной к осям координат площадке. 3. Уравнения равновесия и закон парности касательных напряжений.

=====

I. На деформируемое тело воздействуют внешние силовые факторы (силы и моменты). Эти факторы могут быть поверхностными или объемными. Рассмотрим некое деформируемое тело, рассеченное плоскостью (рис. 7.1).

Зададим направление \vec{n} для полученной площадки среза. Выделим элементарную площадку среза dA , на которую воздействует внешняя сила $d\vec{F}$, и определим вектор напряжений $\vec{\sigma}^n$:

$$\vec{\sigma}^n = \lim_{dA \rightarrow 0} \frac{d\vec{F}}{dA}. \quad (7.1)$$

Свяжем площадку с системой координат, у которой две оси будут лежать в плоскости площадки, а одна перпендикулярно к ней.

Пусть вектор напряжений располагается под некоторым углом по отношению к оси x_3 . Очевидно, можно определить проекцию данного вектора напряжений на нормаль \vec{n} к площадке, совпадающей с осью x_3 . Тогда модуль вектора напряжений может быть связан с нормальным σ_N и касательным напряжением σ_τ следующей зависимостью:

$$|\vec{\sigma}^n| = \sqrt{\sigma_N^2 + \sigma_\tau^2}. \quad (7.2)$$

Вектор напряжений $\vec{\sigma}^n$ может быть разложен по проекциям, а проекции могут быть соответствующим образом обозначены через их абсолютные величины и орты осей (рис. 7.2):

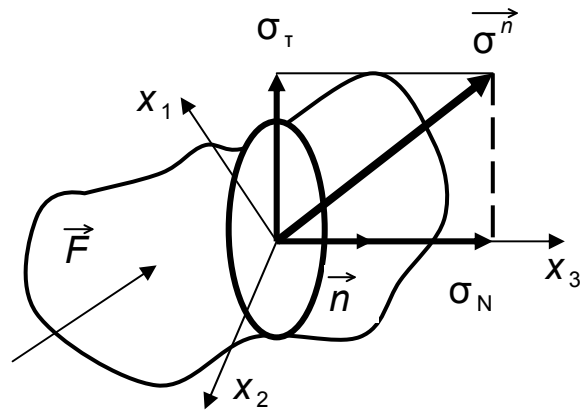


Рис. 7.1. К определению вектора напряжений

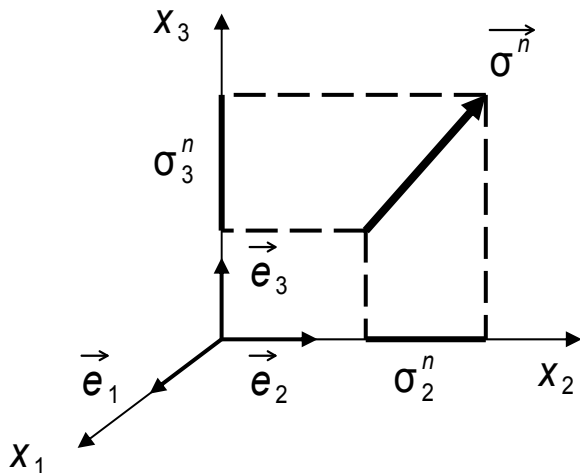


Рис. 7.2. Разложение вектора напряжений на составляющие

$$\vec{\sigma}^n = \vec{e}_i \cdot \sigma_i^n, \quad (7.3)$$

где \vec{e}_i – орты осей; σ_i^n – проекции вектора напряжений на соответствующие оси.

В записи (7.3) использовано **правило Эйнштейна**: если в записи при умножении индексированных объектов имеет место совпадение двух индексов, то по ним производится суммирование. Ниже дана иллюстрация правила Эйнштейна.

$$\vec{e}_j \cdot \sigma_{ij} = \sum_{j=1}^3 \vec{e}_j \cdot \sigma_{ij} = \vec{e}_1 \cdot \sigma_{i1} + \vec{e}_2 \cdot \sigma_{i2} + \vec{e}_3 \cdot \sigma_{i3}. \quad (7.4)$$

На основании формулы (7.4) вектор напряжений $\vec{\sigma}^n$ (см. формулу (7.3)) в связи с коммутативностью множителей имеет вид:

$$\vec{\sigma}^n = \sigma_1^n \vec{e}_1 + \sigma_2^n \vec{e}_2 + \sigma_3^n \vec{e}_3 = \sigma_i^n \vec{e}_i. \quad (7.5)$$

Направляющий (единичный) вектор \vec{n} в разложении по триаде орт имеет вид:

$$\vec{n} = n_i \vec{e}_i, \quad (7.6)$$

где n_i – направляющие косинусы.

Если вектор \vec{K} , определяющий положение площадки не единичный, то он подлежит нормировке по формуле

$$\vec{n} = \frac{K_i \cdot \vec{e}_i}{|\vec{K}|}, \quad (7.7)$$

где K_i – компоненты вектора.

Покажем, что компоненты направляющего вектора в формуле (7.6) действительно являются направляющими косинусами, для чего умножим скалярно это уравнение на какой-либо орт, например, \vec{e}_k :

$$\vec{e}_k \cdot \vec{n} = n_i \underbrace{\vec{e}_i \cdot \vec{e}_k}_{\delta_{ik}}, \quad (7.8)$$

где δ_{ik} – символ Кронеккера.

Следовательно, ввиду единичности модуля орта **символ Кронеккера** определяется таким образом:

$$\delta_{ik} = \vec{e}_i \cdot \vec{e}_k; \quad \delta_{ik} = \begin{cases} 1 & i=k \\ 0 & i \neq k \end{cases}. \quad (7.9)$$

Свойство символа Кронеккера:

$$n_i \delta_{ik} = n_k, \quad (7.10)$$

т. е. он производит замену индекса.

Покажем, что формула (7.10) справедлива, взяв, например, $k = 1$:

$$n_i \delta_{i1} = n_1 \delta_{11} + n_2 \delta_{21} + n_3 \delta_{31} = n_1,$$

ввиду $\delta_{11} = 1$; $\delta_{12} = \delta_{13} = 0$.

Очевидно, аналогичные соотношения можно получить и для других значений «к».

С другой стороны, формула (7.8) может быть представлена в ином виде:

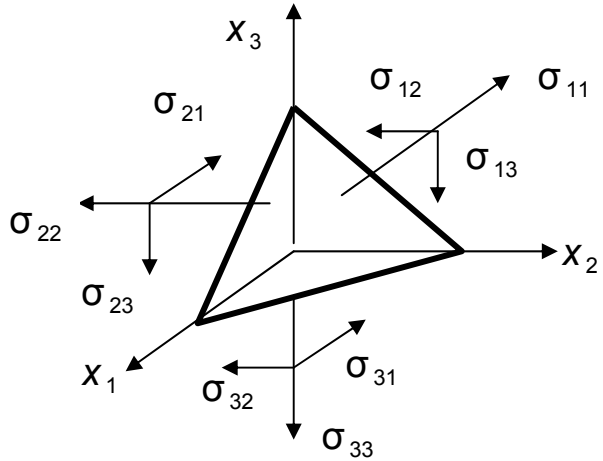


Рис. 7.3. Действие напряжений на наклонной площадке

$$\vec{n} \vec{e}_k = |\vec{n}| |\vec{e}_k| \cdot \cos(\vec{n} \cdot \vec{e}_k) = 1 \cdot 1 \cdot \cos(\vec{n} \cdot \vec{e}_k) = n_k = \cos(\vec{n} \cdot \vec{e}_k),$$

откуда видно, что компоненты направляющего вектора действительно представляют собой косинусы углов между нормалью к площадке и направлением соответствующей оси системы координат.

2. Рассмотрим напряжения, действующие на четырехгранник (рис. 7.3) с целью определения компонент вектора напряжений, приложенного к наклонной площадке. Пусть dA – площадь наклонной грани; dA_1 , dA_2 , dA_3 – площади граней, расположенных перпендикулярно соответствующим координатным осям. Очевидно, площади индексированных граней можно выразить через площадь наклонной грани:

$$dA_i = dA \cos \alpha_i = dA \cdot n_i, \quad (7.11)$$

где α_i – угол между наклонной площадкой и осью системы координат, т. е. здесь n_i – направляющий косинус.

Найдем проекцию всех сил, действующих на данную треугольную пирамиду, на какую-либо из осей, например, ось x_1 :

$$x_1: \sigma_1^n \cdot dA - \sigma_{11} \cdot dA_1 - \sigma_{21} \cdot dA_2 - \sigma_{31} \cdot dA_{31} = 0. \quad (7.12)$$

Подставляя (7.11) в формулу (7.12), получим:

$$\sigma_1^n = \sigma_{11} n_1 + \sigma_{21} n_2 + \sigma_{31} n_3 = \sigma_{i1} n_i = \sigma_{k1} n_k,$$

откуда, с учетом правила суммирования Эйнштейна и обобщения на произвольную ось, имеем окончательно:

$$\sigma_j^n = \sigma_{ij} n_j, \quad (7.13)$$

где j – свободный индекс.

Величины σ_j^n являются составляющими полного вектора напряжений $\vec{\sigma}^n$ на ось x_j , а компоненты тензора напряжений являются функцией координат: $\sigma_{ij} = \sigma_{ij}(x_1, x_2, x_3)$, т. е. они изменяются при переходе от одной точки к другой.

3. Для вывода закона парности касательных напряжений рассмотрим элементарный кубик с компонентами напряжений на его гранях (рис.7.4). Так как компоненты напряжений являются функциями координат, то при переходе из начала координат в точку должно возникать приращение этих компонентов.

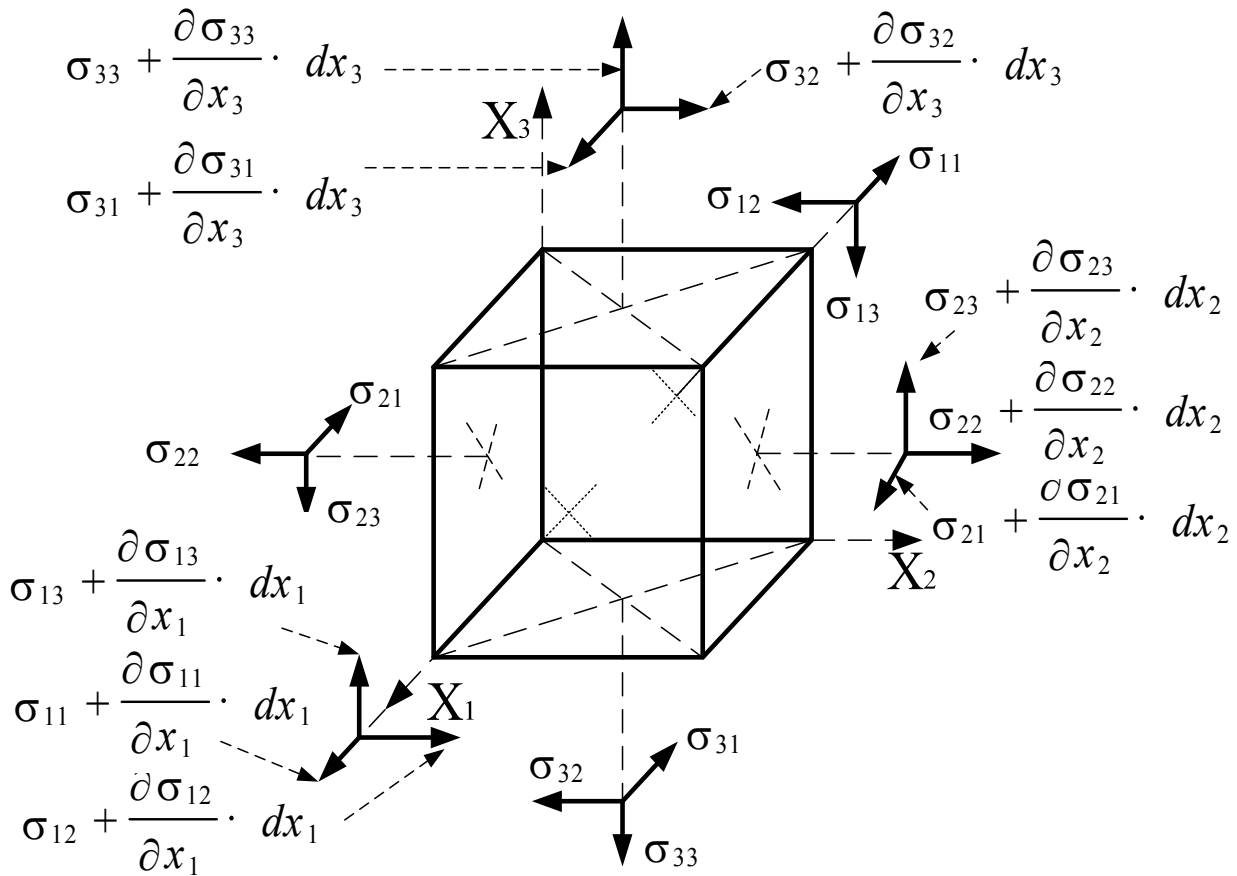


Рис. 7.4. Компоненты напряжений на гранях кубика

Для выполнения условия равновесия кубика должны выполняться два условия:

1. Равенство равнодействующей сил нулю: $\vec{F}^R = 0 \Rightarrow \vec{F}_i^R = 0$.
2. Равенство результирующего момента нулю: $\vec{M}^R = 0; \Rightarrow \vec{M}_i^R = 0$.

Найдем проекции всех сил, например, на ось x_1 , с учетом того, что кроме действия поверхностных сил на выделенный объем действуют также массовые

силы (сила тяжести, магнитные силы, силы инерции). Массовые силы будем обозначать $f^{\vec{M}}$ с соответствующими компонентами. Проецируя все силы на одну из осей и удерживая члены третьего порядка малости по приращению координат, например x_1 , получим:

$$f_1^{\vec{M}} + \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{21}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{31}}{\partial x_3} = 0. \quad (7.14)$$

Свернем данное выражение, учитывая правило суммирования по первому индексу компонент напряжений:

$$x_1: f_1^{\vec{M}} + \frac{\partial \sigma_{j1}}{\partial x_j} = 0.$$

С учетом аналогичных уравнений для осей x_2 и x_3 , получаем уравнения равновесия для всех осей:

$$f_i^{\vec{M}} + \frac{\partial \sigma_{ji}}{\partial x_j} = 0 \quad \text{или} \quad f_i^{\vec{M}} + \sigma_{ji,j} = 0. \quad (7.15)$$

Формула (7.15) представляет собой уравнения равновесия элементарного объема в дифференциальной форме.

Обратимся ко второму условию, выражающему равенство результирующего момента нулю. Будем рассматривать вращение кубика относительно одной из осей, например, оси x_1 . Компоненты тензора напряжений, параллельные оси x_1 , вклада в проекцию момента давать не будут. Расположим наблюдателя в начале системы координат лицом по направлению оси x_1 . Момент считаем положительным, если вращение осуществляется по часовой стрелке и отрицательным – в противном случае.

$$\vec{M} = \begin{bmatrix} \rightarrow \\ \mathbf{r} & \mathbf{f} \\ \rightarrow \end{bmatrix}.$$

$$\begin{aligned} x_1: & \sigma_{12} dx_2 dx_3 \frac{dx_3}{2} - \left(\sigma_{12} + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_1} \cdot dx_1 \right) \cdot dx_2 dx_3 \cdot \frac{dx_3}{2} - \sigma_{13} dx_2 dx_3 \cdot \frac{dx_2}{2} + \\ & + \left(\sigma_{13} + \frac{\partial \sigma_{13}}{\partial x_1} \cdot dx_1 \right) \cdot dx_2 dx_3 \cdot \frac{dx_2}{2} + \sigma_{22} dx_1 dx_3 \cdot \frac{dx_3}{2} - \left(\sigma_{22} + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial x_2} \cdot dx_2 \right) \cdot dx_1 dx_3 \cdot \frac{dx_3}{2} + \\ & + \left(\sigma_{23} + \frac{\partial \sigma_{23}}{\partial x_2} \right) \cdot dx_1 dx_2 dx_3 - \sigma_{33} dx_1 dx_2 \cdot \frac{dx_2}{2} + \left(\sigma_{33} + \frac{\partial \sigma_{33}}{\partial x_3} \cdot dx_3 \right) \cdot dx_1 dx_2 \cdot \frac{dx_2}{2} - \\ & - \left(\sigma_{32} + \frac{\partial \sigma_{32}}{\partial x_3} \cdot dx_3 \right) dx_1 dx_2 dx_3 = 0. \end{aligned}$$

Пренебрегая в последней формуле членами, содержащими бесконечно-малые величины четвертого порядка, получим:

$$(\sigma_{23} - \sigma_{32}) \cdot dx_1 \cdot dx_2 \cdot dx_3 = 0,$$

или с учетом произвольности приращений координат

$$\sigma_{23} = \sigma_{32}. \quad (7.16)$$

Получая аналогичные соотношения для других осей и производя обобщение, можно записать **закон парности касательных напряжений**:

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ji} \quad (7.17)$$

Из формулы (7.17) следует, что тензор напряжений симметричен относительно главной диагонали.

Контрольные вопросы и упражнения

1. Изобразить деформируемое тело и действующие на него силовые факторы с системой координат.
2. Дать определение вектора напряжений, пояснить смысл входящих величин.
3. Написать связь нормальной и касательной составляющих вектора напряжений.
4. Изобразить разложение вектора напряжений по компонентам.
5. Сделать разложение по координатам вектора напряжений в символьном виде.
6. Сформулировать правило суммирования Эйнштейна и дать его символьную иллюстрацию.
7. Привести определение направляющего вектора по триаде орт.
8. Дать формулу нормировки произвольного вектора, показать это на каком-либо примере.
9. Дать определение символа Кронеккера.
10. Написать формулу, отражающую свойство символа Кронеккера.
11. Доказать свойство символа Кронеккера.
12. Показать, что компоненты направляющего вектора действительно являются направляющими косинусами.
13. Изобразить действие напряжений на гранях треугольной пирамиды, отсекаемой наклонной площадкой.
14. Написать соотношение между площадью наклонной площадки и боковыми гранями отсекаемой треугольной пирамиды.
15. Изобразить какую-либо грань треугольной пирамиды и наклонную площадку и вывести соотношение между их площадями (см. вопрос 13).
16. Записать проекции действующих на тетраэдр сил на все оси системы координат.
17. Произвести свертку по одному из индексов в соотношениях, отражающих проекции сил, действующих на треугольную пирамиду.
18. Написать формулу связи компонент вектора напряжений с компонентами тензора напряжений и компонентами направляющего вектора площадки.
19. Зависят ли в общем случае компоненты тензора напряжений от координат? Записать общий вид этой зависимости в символьном виде.
20. Какие условия должны соблюдаться для равновесия выделенного элементарного объема (кубика)? Записать их.
21. Изобразить элементарный объем, указать направления напряжений и их значения на лицевых гранях кубика.

22. Записать проекции действующих на кубик сил (включая массовые) на все оси координат.
23. Произвести свертку по одному из индексов в выражениях всех проекций действующих на кубик сил.
24. Записать уравнения равновесия в дифференциальной форме.
25. Записать общую формулу для определения момента в векторном виде.
26. Записать модуль момента на основе его определения.
27. Как устанавливается знак частных моментов?
28. Записать проекции моментов на все оси в полной форме.
29. Какие допущения принимаются для вывода закона парности касательных напряжений?
30. Записать закон парности касательных напряжений.
31. Записать закон парности касательных напряжений для оси x_2 .
32. Каким свойством обладает тензор напряжений ввиду справедливости закона парности касательных напряжений?

Лекция 8. Интегральные условия равновесия. Главные напряжения

=====

1. Интегральные условия равновесия. 2. Главные напряжения и главные направления. 3. Разложение тензора напряжений на девиатор и шаровой тензор

=====

1. Приведем теоремы, полезные для дальнейшего рассмотрения.

а) **Теорема Гаусса:**

$$\int_A \vec{B} d\vec{A} = \int_V \text{div } \vec{B} dV, \quad (8.1)$$

где \vec{B} – некий вектор; $d\vec{A}$ – элементарная площадка, которая определяется $d\vec{A} = dA \cdot \vec{n}$.

Дивергенция в формуле (8.1) определяется следующим образом:

$$\text{div} = \vec{e}_m \frac{\partial}{\partial x_m},$$

где \vec{e}_m – единичный вектор, совпадающий с направлением оси m .

С учетом последнего правая часть формулы (8.1) приобретает вид

$$\int_V \vec{e}_m \frac{\partial \vec{B}}{\partial x_m} dV = \int_V \frac{\partial \left(\vec{B} \vec{e}_m \right)}{\partial x_m} dV = \int_V \frac{\partial B_m}{\partial x_m} dV.$$

Теорему Гаусса (8.1) в тензорном представлении можно сформулировать так:

$$\int_A \mathbf{B}_i n_i dA = \int_V \mathbf{B}_{i,i} dV. \quad (8.2)$$

б) Теорема Остроградского:

$$\int_A \left[\vec{\mathbf{B}} \vec{\mathbf{n}} \right] = \int_V \text{rot } \vec{\mathbf{B}} dV, \quad (8.3)$$

где rot – дифференциальный оператор, имеющий вид

$$\text{rot } \vec{\mathbf{B}} = \begin{pmatrix} \vec{\mathbf{e}}_1 & \vec{\mathbf{e}}_2 & \vec{\mathbf{e}}_3 \\ \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_3} \\ B_1 & B_2 & B_3 \end{pmatrix}.$$

С учетом определения элементарной площадки формулу (8.3) можно переписать в следующем виде:

$$\int_A \left[\vec{\mathbf{B}} \vec{\mathbf{n}} \right] \cdot d\mathbf{A} = \int_V \text{rot } \vec{\mathbf{B}} dV. \quad (8.3')$$

Производя переход к символьному представлению в векторном произведении интеграла левой части, получаем для компоненты i :

$$i: \left[\vec{\mathbf{B}} \vec{\mathbf{n}} \right]_i = \varepsilon_{ijk} \cdot B_j \cdot n_k, \quad (8.4)$$

где ε_{ijk} – (псевдо)тензор Леви-Чивиты, который определяется так:

$$\varepsilon_{ijk} = \begin{cases} 1 & i, j, k \text{ – образуют циклическую перестановку;} \\ -1 & i, j, k \text{ – образуют антициклическую перестановку;} \\ 0 & \text{два и более индексов совпадают.} \end{cases}$$

Для доказательства возможности представления (8.4) рассмотрим векторное произведение:

$$\left[\vec{\mathbf{B}} \vec{\mathbf{C}} \right] = \vec{\mathbf{e}}_1 \cdot (-1)^{1+1} \begin{pmatrix} B_2 & B_3 \\ C_2 & C_3 \end{pmatrix} + \vec{\mathbf{e}}_2 \cdot (-1)^{1+2} \begin{pmatrix} B_1 & B_3 \\ C_1 & C_3 \end{pmatrix} + \vec{\mathbf{e}}_3 \cdot (-1)^{1+3} \begin{pmatrix} B_1 & B_2 \\ C_1 & C_2 \end{pmatrix}.$$

То же самое векторное произведение с использованием псевдотензора Леви-Чивиты можно представить в покомпонентном виде так:

$$\left[\vec{\mathbf{B}} \vec{\mathbf{C}} \right]_i = \varepsilon_{ijk} \cdot B_j \cdot C_k.$$

Пусть в последнем соотношении $i=1$, тогда:

$$\left[\vec{\mathbf{B}} \vec{\mathbf{C}} \right]_1 = \varepsilon_{1jk} B_j C_k = \varepsilon_{11k} B_1 C_k + \varepsilon_{12k} B_2 C_k + \varepsilon_{13k} B_3 C_k =$$

$= \varepsilon_{123} \mathbf{B}_2 \mathbf{C}_3 + \varepsilon_{132} \mathbf{B}_3 \mathbf{C}_2 = \mathbf{B}_2 \mathbf{C}_3 - \mathbf{B}_3 \mathbf{C}_2$, что совпадает с первой компонентой исходного векторного произведения.

Аналогичное доказательство можно провести и для других значений индекса. Псевдотензором Леви-Чивиты можно пользоваться для представления выражений такого вида.

С учетом формулы (8.4) теорема Остроградского (8.3') в тензорном представлении получает следующую форму:

$$\oint_{\mathbf{A}} \varepsilon_{ijk} \cdot \mathbf{B}_k \cdot \mathbf{n}_j \cdot d\mathbf{A} = \int_{\mathbf{V}} \varepsilon_{ijk} \cdot \mathbf{B}_{k,j} \cdot d\mathbf{V}. \quad (8.3'')$$

Интегральное уравнение равновесия для сил (рис. 8.1) имеет вид

$$\int_{\mathbf{V}} \vec{\mathbf{f}}^{\mathbf{M}} d\mathbf{V} + \int_{\mathbf{A}} \vec{\sigma}^{\mathbf{n}} d\mathbf{A} = \mathbf{0}, \quad (8.5)$$

где $\vec{\mathbf{f}}^{\mathbf{M}}$ – массовая сила; $d\mathbf{V}$ – объем кубика;
 $\vec{\sigma}^{\mathbf{n}}$ – вектор напряжений; $d\mathbf{A}$ – элемент поверхности.

Уравнение (8.5) следует из более общего условия механики для сил:

$$\vec{\mathbf{F}}^{\mathbf{R}} = \int_{\mathbf{V}} \vec{\mathbf{f}}^{\mathbf{M}} d\mathbf{V} + \int_{\mathbf{A}} \vec{\sigma}^{\mathbf{n}} d\mathbf{A}, \quad \mathbf{F}_i^{\mathbf{R}} = \int_{\mathbf{V}} \mathbf{f}_i^{\mathbf{M}} d\mathbf{V} + \int_{\mathbf{A}} \sigma_i^{\mathbf{n}} d\mathbf{A}. \quad (8.6)$$

$\vec{\mathbf{F}}^{\mathbf{R}} = \mathbf{0}$ (условие равновесия) $\Rightarrow \mathbf{F}_i^{\mathbf{R}} = 0$. Здесь $\vec{\mathbf{F}}^{\mathbf{R}}$ – результирующая сила.

Рассмотрим связь интегрального и дифференциального условий равновесия. Для этого, с учетом (7.13) и (8.2), $\mathbf{F}_i^{\mathbf{R}}$ представим в следующем виде:

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_i^{\mathbf{R}} &= \int_{\mathbf{V}} \mathbf{f}_i^{\mathbf{M}} d\mathbf{V} + \int_{\mathbf{A}} \sigma_i^{\mathbf{n}} d\mathbf{A} = \left\langle \begin{array}{l} \text{преобразуем} \\ \text{второй} \\ \text{интеграл} \end{array} \right\rangle = \int_{\mathbf{V}} \mathbf{f}_i^{\mathbf{M}} d\mathbf{V} + \int_{\mathbf{A}} \sigma_{ji} \mathbf{n}_j d\mathbf{A} = \\ &= \left\langle \begin{array}{l} \text{применим теорему} \\ \text{Гаусса ко 2-му} \\ \text{интегралу} \end{array} \right\rangle = \int_{\mathbf{V}} \mathbf{f}_i^{\mathbf{M}} d\mathbf{V} + \int_{\mathbf{V}} \sigma_{ji,j} d\mathbf{V} = \int_{\mathbf{V}} (\mathbf{f}_i^{\mathbf{M}} + \sigma_{ji,j}) d\mathbf{V} = \mathbf{0}. \end{aligned} \quad (8.7)$$

Ввиду произвольности объема, по которому производится интегрирование, из (8.7) получаем условие равновесия для сил в дифференциальной форме, совпадающее с формулой (7.15), полученной ранее другим путем: $\mathbf{f}_i^{\mathbf{M}} + \sigma_{ji,j} = \mathbf{0}$.

Интегральное условие равновесия для моментов (см. рис. 8.1) можно записать в привязке к началу системы координат в виде

$$\vec{\mathbf{M}}^{\mathbf{R}} = \int_{\mathbf{V}} \left[\vec{\mathbf{r}} \vec{\mathbf{f}}^{\mathbf{M}} \right] \cdot d\mathbf{V} + \int_{\mathbf{A}} \left[\vec{\mathbf{r}} \vec{\sigma}^{\mathbf{n}} \right] \cdot d\mathbf{A} = \mathbf{0}, \quad (8.8)$$

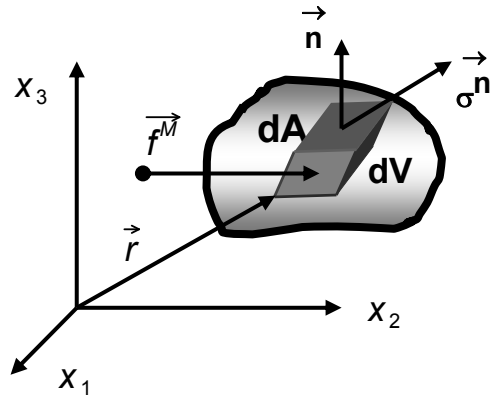


Рис. 8.1. Действие сил на элементарный объем

где \vec{r} – радиус-вектор, указанный на рис. (8.1).

Компоненту i момента (8.6) с учетом формул (8.4), (7.13) и (8.3'') можно преобразовать следующим образом:

$$\begin{aligned} M_i^R &= \int_V \varepsilon_{ijk} x_j f_k^M dV + \int_A \varepsilon_{ijk} x_j \sigma_k^n dA = \int_V \varepsilon_{ijk} x_j f_k^M dV + \\ &+ \int_A \varepsilon_{ijk} x_j \sigma_{lk} n_l dA = \left\langle \begin{array}{l} \text{теорема} \\ \text{Остроградского} \end{array} \right\rangle = \int_V \varepsilon_{ijk} x_j f_k^M dV + \\ &+ \int_V \varepsilon_{ijk} \left(x_j \sigma_{lk} \right)_l dV = \int_V \varepsilon_{ijk} \left\{ x_j \left(f_k^M + \sigma_{lk,l} \right) + \sigma_{jk} \right\} dV = 0. \end{aligned}$$

Откуда, ввиду произвольности объема интегрирования и справедливости формулы (7.15), получаем закон парности касательных напряжений:

$$\varepsilon_{ijk} \sigma_{jk} = 0. \quad (8.9)$$

Формула (8.9) эквивалентна соотношению (7.17); в ней индекс i обозначает направление координатной оси. Очевидно, взяв $i = 1$ и воспользовавшись определением тензора Леви-Чивиты, получим выведенную ранее зависимость (7.16).

2. Повернем площадку (а следовательно, и направляющий вектор, рис. 8.2) таким образом, чтобы касательные напряжения на площадке сделались

равными нулю. Вектор напряжений $\vec{\sigma}^n$ будет совпадать по направлению с направляющим вектором площадки, и тогда можно написать:

$$\vec{\sigma}^n = \sigma \cdot \vec{n}, \quad (8.10)$$

где σ – некоторый коэффициент.

В покомпонентном представлении формула (8.10) дает:

$$\sigma_i^n - \sigma \cdot n_i = 0, \quad \sigma_{ij} \cdot n_j - \delta_{ij} \sigma \cdot n_j = 0, \quad (\sigma_{ij} - \delta_{ij} \sigma) \cdot n_j = 0. \quad (8.11)$$

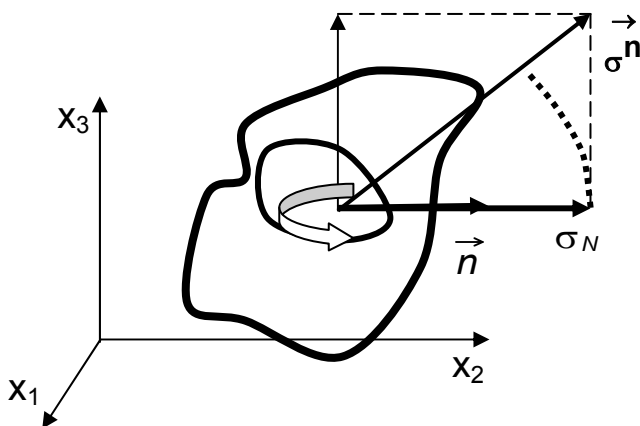


Рис. 8.2. Поворот локальной системы координат

При преобразованиях в формулах (8.11) были использованы соотношения (7.13) и (7.10).

Теперь задача состоит в решении системы (8.11) (последнее уравнение) с целью определения первоначально собственных значений σ (главных напряжений), а затем для каждого из собственных значений, решая систему (8.11) с дополнительным условием: $|\vec{n}|^2 = 1$, можно определить три новых направляющих вектора, определяющих

новое положение трех осей системы координат после поворота.

Из рис. 8.2 видно, что проекция вектора напряжений на направляющий вектор σ_N , представляет собой скалярное произведение вектора напряжений и направляющего вектора ввиду единичности модуля последнего: $\vec{\sigma}^n \cdot \vec{n} = \sigma_N$. Отсюда легко получить соотношение:

$$\sigma_N = \sigma_i^n n_i = \sigma_{ij} n_j n_i. \quad (8.12)$$

Результат (8.11) может быть получен более изящно **методом неопределенных множителей Лагранжа**, заключающемся в переходе от задачи на условный экстремум к задаче на безусловный экстремум. В нашем случае задача состоит в определении положения системы координат после ее поворота с целью достижения максимума проекции вектора напряжений σ_N при дополнительном условии $|\vec{n}|^2 = 1$. Построим новую функцию $F(n_i) = \sigma_N + \sigma \cdot (1 - |\vec{n}|^2)$, где σ – неопределенный множитель Лагранжа. Используя (8.12), после небольших преобразований получим:

$$F(n_i) = \sigma_{ij} n_i n_j - \sigma(n_i^2 - 1).$$

Найдем производные: $\frac{\partial F(n_i)}{\partial n_k} = 0$, $\frac{\partial F(n_i)}{\partial \sigma} = 0$.

$$\sigma_{ij} \cdot \left(\frac{\partial n_i}{\partial n_k}\right) \cdot n_j + n_i \cdot \sigma_{ij} \cdot \left(\frac{\partial n_j}{\partial n_k}\right) - \sigma \cdot 2 \cdot n_i \cdot \left(\frac{\partial n_i}{\partial n_k}\right) = \sigma_{ij} \cdot (\delta_{ik} n_j + n_i \delta_{jk}) - 2 \cdot \sigma \cdot n_i \cdot \delta_{ik} =$$

$$= \sigma_{kj} n_j + \sigma_{ik} n_i - 2\sigma n_i \delta_{ik} = |j \rightarrow i| = \sigma_{ki} n_i + \sigma_{ik} n_i - 2\sigma n_i \delta_{ik} = 2\sigma_{ik} n_i -$$

$-2\sigma \delta_{ik} n_i = 2(\sigma_{ik} - \sigma \delta_{ik}) n_i = 0$; $n_i^2 = 1$. Отсюда снова имеем ту же систему уравнений, что и (8.11): $(\sigma_{ki} - \sigma \delta_{ik}) \cdot n_i = 0$.

Систему (8.11) можно представить в виде:

$$\begin{cases} (\sigma_{ij} - \sigma \delta_{ij}) n_j = 0 \\ (\sigma_{11} - \sigma) n_1 + \sigma_{12} n_2 + \sigma_{13} n_3 = 0 \\ \sigma_{21} n_1 + (\sigma_{22} - \sigma) n_2 + \sigma_{23} n_3 = 0 \\ \sigma_{31} n_1 + \sigma_{32} n_2 + (\sigma_{33} - \sigma) n_3 = 0 \end{cases} \quad (8.12)$$

Нетривиальное решение системы (8.12) с дополнительным условием $n_i^2 = 1$ можно обеспечить, если выполняется условие:

$$\begin{vmatrix} \sigma_{11} - \sigma & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} - \sigma & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} - \sigma \end{vmatrix} = 0. \quad (8.13)$$

Раскрывая определитель, из (8.13) получим уравнение Гамильтона-Кэлли:

$$\sigma^3 - I_1 \cdot \sigma^2 + I_2 \cdot \sigma - I_3 = 0, \quad (8.14)$$

где $I_1 = \sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}$,

$$I_2 = \begin{vmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{13} \\ \sigma_{31} & \sigma_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{vmatrix},$$

$$I_3 = \begin{vmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{vmatrix}.$$

Уравнение (8.14) может быть сведено к приведенному кубическому уравнению с помощью подстановки:

$$\sigma = X + \frac{I_1}{3}. \quad (8.15)$$

$$X^3 + 3 \cdot P \cdot X + 2 \cdot Q = 0, \quad (8.16)$$

$$\text{где } P = \frac{1}{3} \cdot \left(I_2 - \frac{1}{3} \cdot I_1^2 \right); \quad Q = -\frac{1}{27} \cdot I_1^3 + \frac{1}{6} \cdot I_1 \cdot I_2 - \frac{1}{2} \cdot I_3.$$

Решение приведенного уравнения (8.16) существует при $P^3 + Q^2 < 0$.

Для него *решение Кардано* представляется в тригонометрическом виде:

$$\begin{aligned} X_1 &= 2 \cdot \sqrt{|P|} \cdot \cos \phi, & X_2 &= 2 \cdot \sqrt{|P|} \cdot \cos \left(\phi + \frac{2}{3} \pi \right), \\ X_3 &= 2 \cdot \sqrt{|P|} \cdot \cos \left(\phi - \frac{2}{3} \pi \right), \end{aligned} \quad (8.17)$$

$$\text{где } \phi = \frac{1}{3} \cdot \arccos \left(-Q \cdot |P|^{-\frac{3}{2}} \right).$$

Найденные решения (8.17) следует подставить в (8.15) для определения главных напряжений $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$. Проверку правильности определения главных напряжений можно установить по значениям коэффициентов I_1, I_2, I_3 в уравнении Гамильтона-Кэлли, которые называются **инвариантами** (т. е. величинами, не изменяющими своих значений при повороте системы координат). В терминах главных напряжений они имеют вид:

$$I_1 = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3; \quad I_2 = \sigma_1 \cdot \sigma_2 + \sigma_2 \cdot \sigma_3 + \sigma_3 \cdot \sigma_1; \quad I_3 = \sigma_1 \cdot \sigma_2 \cdot \sigma_3. \quad (8.18)$$

Анализ инвариантов (8.18): 1) Если только одно из напряжений равно нулю, то $I_3 = 0 \Rightarrow$ двухосное напряженное состояние; 2) Если два напряжения равны нулю, то имеем одноосное напряженное состояние.

Для определения направляющих векторов следует решить систему (8.12) для каждого из найденных главных напряжений с дополнительным условием

$n_i^2 = 1$. Неизвестные направляющие косинусы следует снабжать верхним индексом, одноименным с напряжением: $\sigma_2 \Leftrightarrow n_i^2$ во избежание путаницы. Отметим, что при подстановке главного напряжения в систему (8.12) получаем только два независимых уравнения, поэтому дополнительное условие для направляющих косинусов необходимо. В результате получим три направляющих вектора:

$$\vec{n}^1(n_1^1, n_2^1, n_3^1); \vec{n}^2(n_1^2, n_2^2, n_3^2); \vec{n}^3(n_1^3, n_2^3, n_3^3) \quad . \quad (8.19)$$

Независимых компонент в (8.19) будет только шесть.

При переходе к главным напряжениям тензор напряжений преобразуется:

$$T_\sigma = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{pmatrix} \Rightarrow T_\sigma = \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{pmatrix} \quad . \quad (8.20)$$

3. Тензор напряжений можно представить в виде двух тензоров: девиатора и шарового тензора: $T_\sigma = D_\sigma + T_s$.

$$D_\sigma = \begin{pmatrix} \sigma_1 - \sigma_{cp} & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 - \sigma_{cp} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 - \sigma_{cp} \end{pmatrix}; \quad T_s = \begin{pmatrix} \sigma_{cp} & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{cp} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{cp} \end{pmatrix} \quad . \quad (8.21)$$

Здесь σ_{cp} - среднее гидростатическое давление. Роль каждого из тензоров (8.21) неодинакова в пластической деформации: за изменение формы (точнее, наступление пластичности) ответственен лишь девиатор.

Контрольные вопросы и упражнения

1. Напишите теорему Гаусса в векторном виде и покомпонентно.
2. Как определяется оператор дивергенции?
3. Дайте тензорную трактовку теоремы Гаусса.
4. Напишите теорему Остроградского в векторном виде.
5. Дайте определение оператора ротора. 6. Дайте представление векторного произведения с использованием тензора Леви-Чивиты.
7. Определите псевдотензор Леви-Чивиты.
8. Докажите, что геометрическое и тензорное представление векторного произведения идентичны (выполнить для всех компонент).
9. Дайте тензорную трактовку теоремы Остроградского.
10. Зарисуйте и запишите условия равновесия из теоретической механики для твердого тела.
11. Запишите интегральное уравнение равновесия.
12. Сделайте переход от интегральных соотношений к дифференциальным для сил.

13. Перепишите тензорные уравнения равновесия в координатном представлении.
14. Запишите интегральное условие равновесия для моментов.
15. Сделайте переход от интегральных соотношений к дифференциальным для моментов.
16. Запишите закон парности касательных напряжений через тензор Леви-Чивиты, получите этот закон с числовыми индексами для всех осей.
17. Выведите разрешающее уравнение для главных напряжений.
18. Выполните рисунок и покажите изменение нормальной компоненты при повороте системы координат.
19. Сделайте вывод зависимости нормальной компоненты вектора напряжений от компонент тензора напряжений и направляющего вектора.
20. В чем суть метода неопределенных множителей Лагранжа (МНМД)?
21. Дайте вывод разрешающего уравнения МНМЛ.
22. Каковы условия получения нетривиальных направляющих векторов?
23. Запишите уравнение Гамильтона-Кэлли.
24. Как определяют инварианты?
25. Сделайте переход от уравнения Г-К к приведенному кубическому уравнению.
26. Выпишите корни приведенного кубического уравнения.
27. Как проверить корни уравнения Г-К?
28. Проведите анализ инвариантов.
29. Как получают компоненты направляющих векторов, сколько из них независимых?
30. Разложите тензор напряжений на девиатор и шаровой тензор.

***Лекция 9. Преобразование компонент тензора напряжений.
Интенсивность напряжений***

- =====
- 1. Преобразование компонент тензора напряжений при повороте системы координат. 2. Поверхность Коши, эллипсоид Ламэ. 3. Октаэдрические напряжения. 4. Интенсивность напряжений.*
- =====

1. При решении задач формообразования иногда с целью упрощения исходной системы уравнений целесообразен переход от одной системы координат к другой, осуществляемый чаще всего поворотом системы координат относительно ее центра. Пусть тензор напряжений известен в старой системе координат и привязан к ее центру. Оси новой системы координат обозначим надстрочным индексом «прим» (рис. 9.1). Предположим, что поворот системы координат вполне определен, т. е. известны направляющие косинусы единичного вектора, совпадающего с направлением новой оси:

$$\vec{n}^1(n_1^1, n_2^1, n_3^1): \text{ось } x_1'; \quad \vec{n}^2(n_1^2, n_2^2, n_3^2): \text{ось } x_2'; \quad \vec{n}^3(n_1^3, n_2^3, n_3^3): \text{ось } x_3'. \quad (9.1)$$

На площадке, ориентированной перпендикулярно, например, оси x_1' , действует вектор напряжений с компонентами (см. формулу (7.13)):

$$\sigma_i^{n^1} = \{\sigma_{ij} n_j^1\}. \quad (9.2)$$

Составляющие $\sigma_i^{n^1}$ в (9.2) являются проекциями соответствующего вектора напряжений на старые оси координат. Аналогично такие же проекции можно получить, рассматривая площадки, нормальные и к другим новым осям. В общем случае

$$\sigma_i^{n^k} = \{\sigma_{ij} n_j^k\}. \quad (9.3)$$

Чтобы определить компоненту тензора напряжений в новой системе координат, например σ_{kl}' , необходимо просуммировать произведения проекций вектора напряжений, найденных в старой системе координат, и соответствующих направляющих косинусов:

$$\sigma_{kl}' = \sigma_i^{n^k} \cdot n_l^i = \sigma_{ij} \cdot n_j^k \cdot n_l^i.$$

Напомним, что k обозначает направление новой оси координат, а l – направление действия силы в **новой** системе координат. Окончательно:

$$\sigma_{kl}' = \sigma_{ij} \cdot n_j^k \cdot n_l^i. \quad (9.4)$$

Формула (9.4) есть **закон преобразования компонент** при повороте системы координат в соответствии с (9.1).

2. Напряженное состояние можно представить графически, исходя из следующих рассуждений. Пусть имеется некое тело (рис. 9.2). В нем выделена площадка с вектором \vec{n} и компонентами (n_1, n_2, n_3) . Очевидно, систему координат по отношению к данному телу можно всегда расположить таким образом, чтобы начало ее было на продолжении направляющего вектора. Тогда имеет место следующее соотношение:

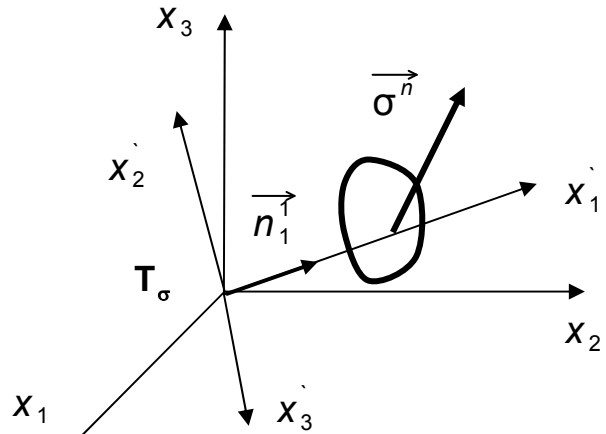


Рис. 9.1. Поворот системы координат

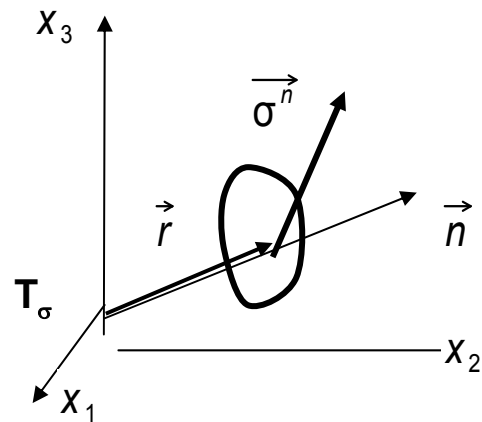


Рис. 9.2. К установлению поверхности Коши

$$|\mathbf{r}| = \frac{\mathbf{k}}{\sqrt{|\sigma_N|}} = \mathbf{r} , \quad (9.5)$$

где k – калибрующий коэффициент; r – модуль радиуса-вектора.

Возведем в квадрат обе части уравнения (9.5) и после небольших преобразований и освобождения от модуля получим:

$$\pm k^2 = \sigma_N \cdot r^2 .$$

Производя подстановку в соответствии с (8.12) и замену \mathbf{r} через координаты, из последнего уравнения получаем:

$$\pm k^2 = \sigma_{ij} \underbrace{\mathbf{n}_i \cdot \mathbf{r}}_{x_i} \cdot \underbrace{\mathbf{n}_j \cdot \mathbf{r}}_{x_j} ,$$

или с учетом замены:

$$\sigma_{ij} \cdot x_i \cdot x_j = \pm k^2 . \quad (9.6)$$

Уравнение (9.6), в котором в качестве коэффициентов квадратичной формы стоят компоненты тензора напряжений, называется **уравнением поверхности Коши**. Данное уравнение поворотом системы координат может быть преобразовано так, чтобы коэффициенты при смешанных членах были равны нулю, что позволяет представить поверхность в терминах главных напряжений:

$$\sigma_1 x_1^2 + \sigma_2 x_2^2 + \sigma_3 x_3^2 = \pm k^2 , \quad (9.7)$$

где $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ – являются главными напряжениями.

Возможна несколько иная интерпретация. Если в формуле (7.13) перейти к главным напряжениям, то получим следующие зависимости:

$$\begin{aligned} \sigma_1^n &= \sigma_1 \cdot \mathbf{n}_1 & \mathbf{n}_1 &= \frac{\sigma_1^n}{\sigma_1} \\ \sigma_2^n &= \sigma_2 \cdot \mathbf{n}_2 , \text{ откуда} & \mathbf{n}_2 &= \frac{\sigma_2^n}{\sigma_2} \\ \sigma_3^n &= \sigma_3 \cdot \mathbf{n}_3 & \mathbf{n}_3 &= \frac{\sigma_3^n}{\sigma_3} \end{aligned} \quad (9.8)$$

Подставляя выражения направляющих косинусов из (9.8) в соотношение $\mathbf{n}_i \cdot \mathbf{n}_i = 1$, получим так называемый **эллипсоид напряжений Ламэ**:

$$\left(\frac{\sigma_1^n}{\sigma_1} \right)^2 + \left(\frac{\sigma_2^n}{\sigma_2} \right)^2 + \left(\frac{\sigma_3^n}{\sigma_3} \right)^2 = 1 . \quad (9.9)$$

Представленные виды интерпретации напряженного состояния показывают, что поверхности, которые образуются вследствие внешних нагрузок, являются **выпуклыми**. Анализ (9.9) дает следующие результаты:

1. *Все напряжения равны между собой.* \Rightarrow Всестороннее сжатие или растяжение (уравнение (9.9) есть уравнение шара): тензор напряжений принимает вид второй формулы (8.21), т. е. переходит в шаровой тензор, инвариантный к выбору системы координат.

2. *Одно из главных напряжений равно нулю.* \Rightarrow Переход к плоскому напряженному состоянию (эллипс).

3. Два главных напряжения равны нулю. \Rightarrow Переход к линейному напряженному состоянию (растяжение-сжатие).

3. Определим напряжения в площадках, одинаково наклоненных к главным осям ($n_i^2 = 1 \Rightarrow \{n_1 = n_2 = n_3 = n\} \Rightarrow n = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$). Эти площадки образуют октаэдр, поэтому соответствующие напряжения называются октаэдрическими. На основании (7.13) нормальное октаэдрическое напряжение имеет вид

$$\sigma_0 = (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) \cdot \frac{1}{3} = \sigma_{\text{ср}}. \quad (9.10)$$

Касательные октаэдрические напряжения определяются из (7.2) с учетом (8.12) для главных напряжений:

$$\tau_0 = \pm \frac{1}{3} \cdot \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_2)^2}. \quad (9.11)$$

Октаэдрическое касательное напряжение близко по величине к наибольшему касательному напряжению τ_{max} для той же точки и находится в пределах:

$0,941 < \frac{\tau_0}{\tau_{\text{max}}} < 0,816$, так что до известной степени оно может характеризовать

уровень напряжений в точке. Напряжение (9.11) иногда называют «интенсивностью касательных напряжений», которую не следует путать с «интенсивностью напряжений», которая является обобщенным напряжением в точке.

4. В качестве обобщенной характеристики напряженного состояния в точке Генке (Хенке) ввел величину σ_i , пропорциональную квадратному корню из второго инварианта девиатора тензора напряжений:

$$\sigma_i = k \sqrt{|I_2(D_\sigma)|}, \quad (9.12)$$

где k – коэффициент, подлежащий определению.

В формуле (9.12) второй инвариант девиатора тензора напряжений определяется на основе (8.14) и (8.21) следующим образом:

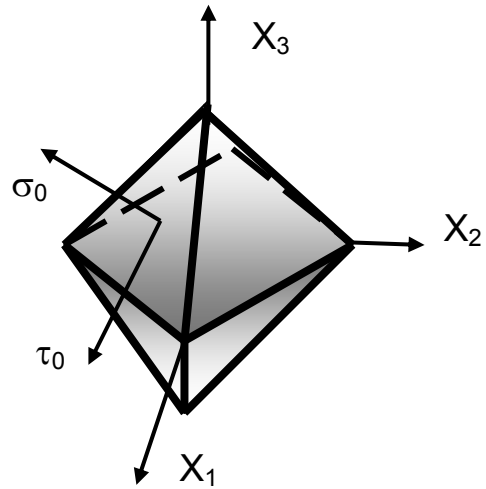


Рис. 9.3. Октаэдрические напряжения

$$\begin{aligned}
I_2(D_\sigma) &= \left| \begin{array}{cc} \sigma_{11} - \sigma_{\text{ср}} & \sigma_{12} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} - \sigma_{\text{ср}} \end{array} \right| + \left| \begin{array}{cc} \sigma_{11} - \sigma_{\text{ср}} & \sigma_{13} \\ \sigma_{31} & \sigma_{33} - \sigma_{\text{ср}} \end{array} \right| + \\
&+ \left| \begin{array}{cc} \sigma_{22} - \sigma_{\text{ср}} & \sigma_{23} \\ \sigma_{32} & \sigma_{33} - \sigma_{\text{ср}} \end{array} \right| = \\
&= -\frac{1}{6} \left\{ (\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + (\sigma_{11} - \sigma_{33})^2 + (\sigma_{22} - \sigma_{33})^2 \right\} - (\sigma_{12}^2 + \sigma_{13}^2 + \sigma_{23}^2).
\end{aligned} \tag{9.13}$$

Комбинируя (9.12) и (9.13), а также переходя к линейному напряженному состоянию, например, $\sigma_i = \sigma_1$, получим значение коэффициента $k = \sqrt{3}$.

Тогда формула (9.12) примет следующий вид:

$$\sigma_i = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \sqrt{(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + (\sigma_{11} - \sigma_{33})^2 + (\sigma_{22} - \sigma_{33})^2 + 6 \cdot (\sigma_{12}^2 + \sigma_{13}^2 + \sigma_{23}^2)}. \tag{9.14}$$

Формула (9.14) представляет собой выражение **интенсивности напряжений**, характеризующее обобщенное (эквивалентное) напряжение в точке деформируемого тела. Интенсивность напряжений используется при характеристике материала с помощью «единой кривой», при формулировке условия пластичности, а также при решении задач формообразования и предельного формоизменения. С частным случаем этой формулы для плоского деформированного состояния вы встречались в курсе «Сопrotивление материалов» при формулировке третьей гипотезы прочности.

Контрольные вопросы и упражнения

1. Для чего осуществляют переход от одной системы координат к другой в ОМД?
2. Как задаются оси новой системы координат?
3. Как следует ориентировать площадку для рассмотрения преобразования координат?
4. Изобразите поворот системы координат с ориентацией одной из площадок с вектором напряжений и нормалью (для второй и третьей новых осей).
5. Запишите покомпонентное представление вектора напряжений, действующее на площадках, перпендикулярных каждой из новых осей.
6. Запишите в обобщенном виде компоненты вектора напряжений, действующего на каждой из площадок, перпендикулярных новым осям системы координат.
7. Как определяется компонента тензора напряжений в новых осях?
8. Дайте развернутое выражение каждой из новых компонент напряжений, используя правило суммирования Эйнштейна.
9. Как выбирают систему координат для получения поверхности Коши? 10. Изобразите ориентацию системы координат по отношению к элементарной площадке для установления поверхности Коши.

11. Как можно представить радиус-вектор через модуль нормальной составляющей вектора напряжений?
12. Выполните переход к алгебраическим величинам, используя исходное соотношение для вывода поверхности Коши, поясните смысл входящих величин.
13. Дайте полный вывод поверхности Коши до получения алгебраического уравнения поверхности.
14. Запишите уравнения, которым должны удовлетворять компоненты тензора напряжений при переходе к главным напряжениям.
15. Запишите поверхность Коши в терминах главных напряжений.
16. Покажите, как выражаются компоненты вектора напряжений при переходе к одномерному случаю.
17. Запишите формулу эллипсоида Ламэ.
18. Что можно сказать о кривизне поверхности напряжений?
19. Какие условия требуются для перехода от эллипсоида Ламэ к шаровому тензору?
20. При каком условии возможен переход к плоскому и линейному напряженному состоянию от эллипсоида Ламэ?
21. Какие напряжения называют октаэдрическими?
22. Из какого условия находят направляющие косинусы площадок, равнонаклонных к осям системы координат?
23. Изобразите октаэдрическую поверхность.
24. Чему равно нормальное октаэдрическое напряжение?
25. Чему равно касательное октаэдрическое напряжение (запишите определяющую формулу)?
26. Как соотносятся октаэдрическое касательное напряжение и наибольшее касательное напряжение?
27. Запишите девиатор напряжений.
28. Запишите второй инвариант от девиатора в терминах определителей.
29. Сделайте переход от определителей к форме алгебраической записи, раскрывая среднее значение напряжения.
30. Запишите общий вид формулы для интенсивности напряжений, предложенной Генке.
31. Дайте полные выкладки при определении неизвестного коэффициента k .
32. Запишите окончательную формулу интенсивности напряжений.
33. Какой вид будет иметь формула интенсивности напряжений, когда два напряжения совпадают?
34. Какой вид имеет формула интенсивности напряжений при переходе к главным напряжениям?
35. Где используется формула интенсивности напряжений?

**Лекция 10. Круговая диаграмма напряжений Мора.
Показатель напряженного состояния**

=====

1. Круговая диаграмма напряжений Мора. 2. Схемы главных напряжений.

=====

1. Круговая диаграмма напряжений Мора позволяет наглядно представить вид напряженного состояния и геометрически решать некоторые вспомогательные задачи.

Постановка задачи: Исходя из заданного вектора напряжений (тензора напряжений и направляющего вектора) определить вид напряженного состояния и соответствующие ему направляющие косинусы для случая перехода к главным напряжениям.

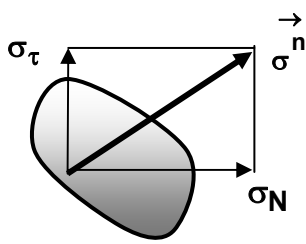


Рис. 10.1. Разложение вектора напряжений

Формулы (7.2), (7.13) и (8.12) имеют вид:

$$\left(\vec{\sigma}^n \right)^2 = \sigma_N^2 + \sigma_\tau^2; \quad \sigma_i^n = \sigma_{ij} \cdot n_j; \quad \sigma_N = \sigma_{ij} \cdot n_i \cdot n_j.$$

Квадрат модуля вектора напряжений определяется как скалярное произведение:

$$\left(\vec{\sigma}^n \right)^2 = \sigma_i^n \sigma_i^n = \left(\sigma_i^n \right)^2. \quad (10.1)$$

При переходе к главным напряжениям σ_N и (10.1) принимают вид:

$$\sigma_N = \sigma_{1j} n_1 n_j + \sigma_{2j} n_2 n_j + \sigma_{3j} n_3 n_j = \sigma_1 n_1^2 + \sigma_2 n_2^2 + \sigma_3 n_3^2, \quad (10.2)$$

$$\left(\vec{\sigma}^n \right)^2 = \left(\sigma_1^n \right)^2 + \left(\sigma_2^n \right)^2 + \left(\sigma_3^n \right)^2 = \left(\sigma_1 n_1 \right)^2 + \left(\sigma_2 n_2 \right)^2 + \left(\sigma_3 n_3 \right)^2. \quad (10.3)$$

Представим два из вышеприведенных уравнений с добавлением к ним условия единичности направляющего вектора, умножим их чисто формально на **a**, **b** и **c** соответственно, и сложим, производя группировку:

$$\sigma_N = \sigma_1 n_1^2 + \sigma_2 n_2^2 + \sigma_3 n_3^2 \quad | \cdot a$$

$$\sigma_N^2 + \sigma_\tau^2 = \sigma_1^2 n_1^2 + \sigma_2^2 n_2^2 + \sigma_3^2 n_3^2 \quad | \cdot b$$

$$1 = n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 \quad | \cdot c$$

$$b \cdot \sigma_\tau^2 + b \cdot \sigma_N^2 + a \cdot \sigma_N + c = n_1^2 (b \sigma_1^2 + a \sigma_1 + c) + n_2^2 (b \sigma_2^2 + a \sigma_2 + c) + n_3^2 (b \sigma_3^2 + a \sigma_3 + c).$$

Последнее уравнение можно сделать более компактным за счет введения функции: $f(z) = b \cdot z^2 + a \cdot z + c$.

$$b \cdot \sigma_\tau^2 + b \cdot \sigma_N^2 + a \cdot \sigma_N + c = n_1^2 \cdot f(\sigma_1) + n_2^2 \cdot f(\sigma_2) + n_3^2 \cdot f(\sigma_3). \quad (10.4)$$

Определим из этого уравнения (10.4) n_1^2 . Для этого в скобках при n_2^2 и n_3^2 нужно выбрать коэффициенты **a, b, c** таким образом, чтобы эти скобки об-

ратились в нуль, т. е. σ_2 и σ_3 должны быть корнями уравнения $\mathbf{f}(\mathbf{z}) = \mathbf{0}$. Квадратный трехчлен допускает разложение:

$$\mathbf{b}\mathbf{z}^2 + \mathbf{a} \cdot \mathbf{z} + \mathbf{c} = (\mathbf{z} - \sigma_2)(\mathbf{z} - \sigma_3). \quad (10.5)$$

Раскроем правую часть последнего уравнения:

$$\mathbf{b}\mathbf{z}^2 + \mathbf{a} \cdot \mathbf{z} + \mathbf{c} = \mathbf{z}^2 - (\sigma_2 + \sigma_3)\mathbf{z} + \sigma_2\sigma_3,$$

откуда следует: $\mathbf{b} = \mathbf{1}$; $\mathbf{a} = -(\sigma_2 + \sigma_3)$; $\mathbf{c} = \sigma_2\sigma_3$.

Перепишем уравнение (10.4) с учетом (10.5):

$$\mathbf{n}_1^2 = \frac{\sigma_\tau^2 + \mathbf{f}(\sigma_N)}{\mathbf{f}(\sigma_1)} = \frac{\sigma_\tau^2 + (\sigma_N - \sigma_2)(\sigma_N - \sigma_3)}{(\sigma_1 - \sigma_2)(\sigma_1 - \sigma_3)}. \quad (10.6)$$

Остальные выражения для \mathbf{n}_2 и \mathbf{n}_3 получаются путем циклической перестановки индексов:

$$\mathbf{n}_2^2 = \frac{\sigma_\tau^2 + (\sigma_N - \sigma_3)(\sigma_N - \sigma_1)}{(\sigma_2 - \sigma_3)(\sigma_2 - \sigma_1)}; \quad (10.7)$$

$$\mathbf{n}_3^2 = \frac{\sigma_\tau^2 + (\sigma_N - \sigma_1)(\sigma_N - \sigma_2)}{(\sigma_3 - \sigma_1)(\sigma_3 - \sigma_2)}. \quad (10.8)$$

Введем легко проверяемое тождество:

$$(\sigma_N - \sigma_i)(\sigma_N - \sigma_j) = \left(\sigma_N - \frac{\sigma_i + \sigma_j}{2} \right)^2 - \left(\frac{\sigma_i - \sigma_j}{2} \right)^2,$$

с учетом которого уравнения (10.6) – (10.8) имеют вид:

$$\sigma_\tau^2 + \left(\sigma_N - \frac{\sigma_2 + \sigma_3}{2} \right)^2 = \overbrace{\left(\frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2} \right)^2}^{\mathbf{R}_{10}^2} + \overbrace{\mathbf{n}_1^2(\sigma_1 - \sigma_2)(\sigma_1 - \sigma_3)}^{\Delta_1},$$

$$\mathbf{R}_1^2 = \mathbf{R}_{10}^2 + \Delta_1; \quad \Delta_1 > 0. \quad (10.9)$$

$$\sigma_\tau^2 + \left(\sigma_N - \frac{\sigma_3 + \sigma_1}{2} \right)^2 = \left(\frac{\sigma_3 - \sigma_1}{2} \right)^2 + \mathbf{n}_2^2(\sigma_2 - \sigma_3)(\sigma_2 - \sigma_1) = \mathbf{R}_2^2,$$

$$\mathbf{R}_2^2 = \mathbf{R}_{20}^2 - \Delta_2; \quad \Delta_2 < 0. \quad (10.10)$$

$$\sigma_\tau^2 + \left(\sigma_N - \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} \right)^2 = \left(\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \right)^2 + \mathbf{n}_3^2(\sigma_3 - \sigma_1)(\sigma_3 - \sigma_2) = \mathbf{R}_3^2,$$

$$\mathbf{R}_3^2 = \mathbf{R}_{30}^2 + \Delta_3; \quad \Delta_3 > 0. \quad (10.11)$$

Уравнения (10.9) – (10.11) представляют собой уравнения окружностей, а знаки $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$ соответствуют выполнению условия:

$$\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3. \quad (10.12)$$

Построим соответствующие (полу)окружности (10.9) – (10.11) с учетом знаков приращений Δ_i (рис. 10.2).

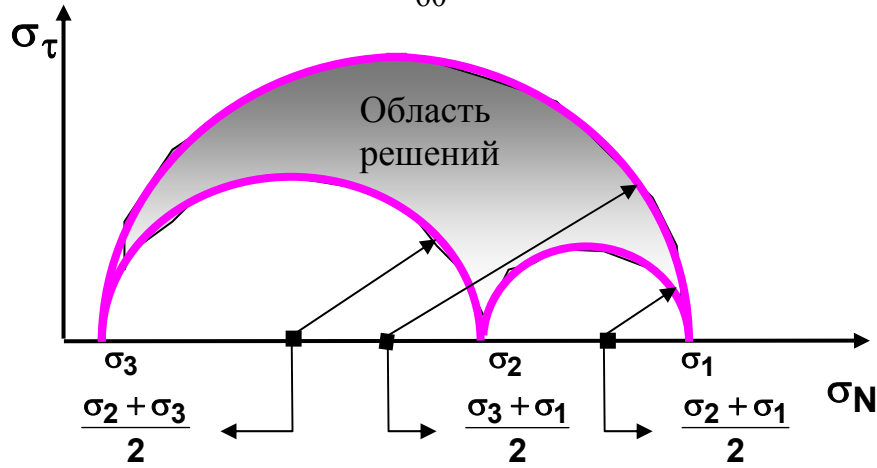


Рис. 10.2. Круги (диаграмма) Мора

Из анализа диаграммы следует ряд вопросов:

1. Можно ли на диаграмме указать точки, которым соответствует, например, случай, когда $\mathbf{n}_1 = \mathbf{0}$? \Rightarrow Из (10.9) следует:

$$\sigma_\tau^2 + \left(\sigma_N - \frac{\sigma_2 + \sigma_3}{2} \right)^2 = \left(\frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2} \right)^2, \text{ следовательно, точки, соответствующие}$$

щие $\mathbf{n}_1 = \mathbf{0}$, лежат на окружности между σ_2 и σ_3 .

2. Можно ли определить, например, \mathbf{n}_2 и \mathbf{n}_3 в вершинной точке окружности, если $\mathbf{n}_1 = \mathbf{0}$? \Rightarrow Координаты вершинной точки (рис. 10.2):

$$\begin{cases} \sigma_N = \frac{\sigma_2 + \sigma_3}{2} \\ \sigma_\tau = \frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2} \end{cases}. \text{ Из (10.7) с подстановкой этих напряжений получаем:}$$

$$n_2^2 = \frac{\left(\frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2} \right)^2 + \left(\frac{\sigma_2 + \sigma_3 - 2\sigma_1}{2} \right) \left(\frac{\sigma_2 + \sigma_3 - 2\sigma_3}{2} \right)}{(\sigma_2 - \sigma_1)(\sigma_2 - \sigma_3)} = \frac{1(2\sigma_2 - 2\sigma_1)}{4(\sigma_2 - \sigma_1)} = \frac{1}{2}, \text{ откуда}$$

$n_2 = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$. Значение \mathbf{n}_3 можно определить из уравнения (10.8) путем проведения аналогичной процедуры или же из соотношения:

$$n_i^2 = 1; \quad n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = 1 \Rightarrow n_3^2 = \frac{1}{2}; \quad n_3 = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Если выполнить аналогичные вычисления для других окружностей, можно заполнить таблицу, приведенную ниже.

Сочетание направляющих косинусов для трех площадок соответствуют случаям максимальных касательных напряжений.

$$\sigma_\tau \rightarrow \quad \tau_1 = \frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2}; \quad \tau_2 = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}; \quad \tau_3 = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}.$$

Площадки, в которых расположены максимальные касательные напряжения, должны включать в себя соответствующую ось и проходить под углом 45° по отношению к двум другим осям. Соответствующие площадки называются октаэдрическими (см. Л.9).

3. Как изменятся уравнения, описывающие окружности, если все главные напряжения изменить на одну и ту же величину, например, увеличить на σ_0 ?

	n_1	n_2	n_3
1.	0	$\pm \frac{1}{\sqrt{2}}$	$\pm \frac{1}{\sqrt{2}}$
2.	$\pm \frac{1}{\sqrt{2}}$	0	$\pm \frac{1}{\sqrt{2}}$
3.	$\pm \frac{1}{\sqrt{2}}$	$\pm \frac{1}{\sqrt{2}}$	0

$$\begin{aligned} \sigma_1' &= \sigma_1 + \sigma_0 & \sigma_1 &= \sigma_1' - \sigma_0 \\ \sigma_2' &= \sigma_2 + \sigma_0, & \Rightarrow & \sigma_2 &= \sigma_2' - \sigma_0 \\ \sigma_3' &= \sigma_3 + \sigma_0 & & \sigma_3 &= \sigma_3' - \sigma_0 \end{aligned}$$

Покажем, что будет происходить с уравнениями на примере уравнения (10.6):

$$\begin{aligned} n_1^2 &= \frac{\sigma_\tau^2 + (\sigma_N - \sigma_2' + \sigma_0)(\sigma_N - \sigma_3' + \sigma_0)}{(\sigma_1' - \sigma_2')(\sigma_1' - \sigma_3')} = \frac{\sigma_\tau^2 + \left\{ \sigma_N - (\sigma_2' - \sigma_0) \right\} \cdot \left\{ \sigma_N - (\sigma_3' - \sigma_0) \right\}}{(\sigma_1' - \sigma_2')(\sigma_1' - \sigma_3')} = \\ &= \frac{\sigma_\tau^2 + \left(\sigma_N - \frac{\sigma_2' - \sigma_0 + \sigma_3' - \sigma_0}{2} \right)^2 - \left(\frac{\sigma_2' - \sigma_0 - \sigma_3' + \sigma_0}{2} \right)^2}{(\sigma_1' - \sigma_2')(\sigma_1' - \sigma_3')} = \\ &= \frac{\sigma_\tau^2 + \left(\sigma_N - \frac{\sigma_2' + \sigma_3'}{2} - \sigma_0 \right)^2 - \left(\frac{\sigma_2' - \sigma_3'}{2} \right)^2}{(\sigma_1' - \sigma_2')(\sigma_1' - \sigma_3')} \end{aligned}$$

Из последнего выражения видно, что радиус первого круга Мора остался неизменным, но произошел сдвиг по оси σ_N на величину σ_0 вправо. Для других кругов преобразования будут аналогичны, так что форма диаграммы Мора не претерпевает изменений, однако как целое она будет сдвинута по оси абсцисс на величину σ_0 .

4. Можно ли по диаграмме Мора определить величину среднего напряжения

$$\sigma_{\text{ср}} = \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3} ? \Rightarrow \text{Выполним дополнительные построения на диаграмме}$$

Мора в виде окаймляющего прямоугольника, соединив прямыми линиями верхние углы прямоугольника с центрами меньших окружностей, как показано на рис. 10.3. Проекция точки пересечения этих линий на ось главных напряжений представляет собой среднее напряжение. Докажем, что величина x равняется $\sigma_{\text{ср}}$. Рассмотрим подобие треугольников: 1. ΔO_1CD и ΔO_1KE ; 2. ΔABO_2 и ΔEKO_2 .

$$\frac{KE}{CD} = \frac{O_1E}{O_1D}; \quad \frac{KE}{AB} = \frac{O_2E}{AO_2}, \text{ т. к. левые части их одинаковы, то } \frac{O_1E}{O_1D} = \frac{O_2E}{AO_2}.$$

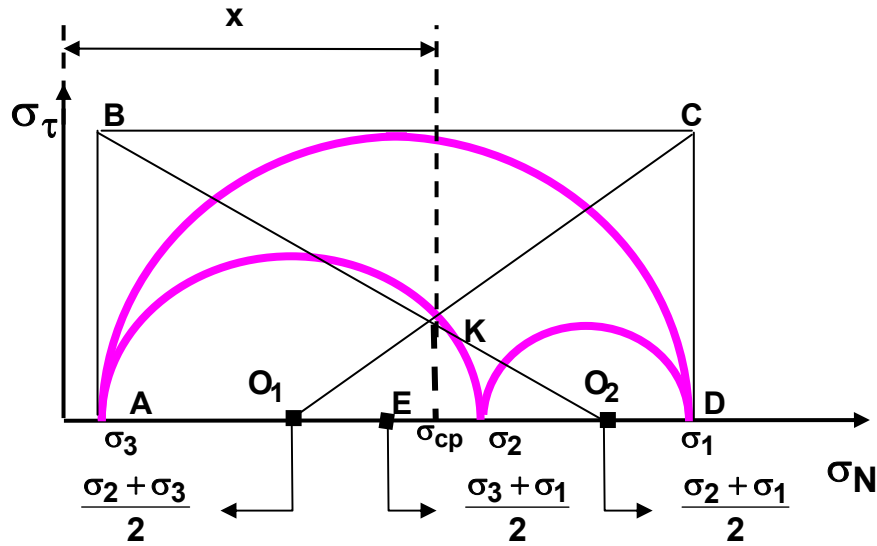


Рис. 10.3. К определению среднего напряжения

Перейдем к напряжениям, используя последнее геометрическое соотношение:

$$\frac{x - \frac{\sigma_2 + \sigma_3}{2}}{\sigma_1 - \frac{\sigma_2 + \sigma_3}{2}} = \frac{\frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} - x}{\frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} - \sigma_3} .$$

$$2x \{ (\sigma_1 + \sigma_2 - 2\sigma_3) + (2\sigma_1 - \sigma_2 - \sigma_3) \} =$$

$$= (\sigma_1 + \sigma_2)(2\sigma_1 - \sigma_2 - \sigma_3) + (\sigma_2 + \sigma_3)(\sigma_1 + \sigma_2 - 2\sigma_3) .$$

Отсюда получаем: $x = \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3} = \sigma_{cp}$.

5. Если заданы два угла между направляющим вектором и двумя осями координат, то можно ли установить соответствующее им положение точки на диаграмме Мора?

Задача 1. Пусть заданы α_1 и α_3 , т. е. заданы n_1 и n_3 :

$$n_1 = \cos \alpha_1,$$

$$n_3 = \cos \alpha_3 .$$

$\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ – также заданы. Найти:

$$\sigma_N, \sigma_\tau - ?$$

Решение. Берут два вектора O_1E и O_2E (рис. 10.4). Затем данные векторы разворачивают на углы $2\alpha_1$ и $2\alpha_3$ соответственно. Потом из

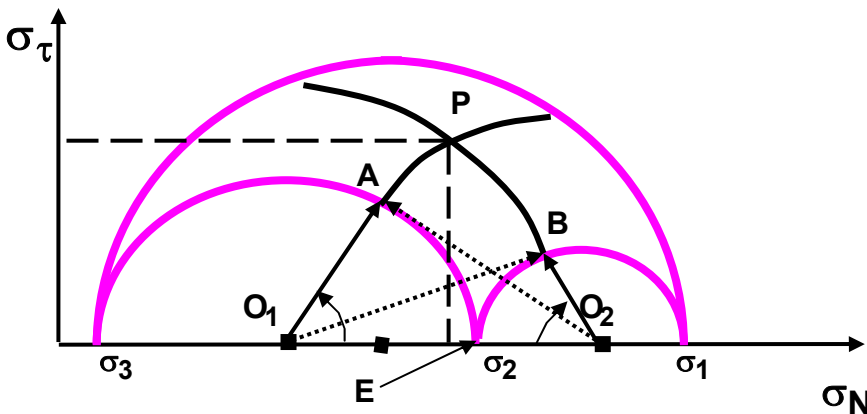


Рис. 10.4. К определению углов в кругах Мора

точки O_1 радиусом O_1B описывают дугу в верхней полуплоскости, а из точки O_2 описывают дугу радиусом O_2A . Точка пересечения дуг или окружностей является искомой. Проекции точки P на оси абсцисс и ординат дают искомые значения σ_N и σ_τ соответственно.

Задача 2. Задано: α_1 и α_2 . Другие условия – как в задаче 1.

Решение. Используя условие $n_i^2 = 1 \Leftrightarrow \cos^2 \alpha_1 + \cos^2 \alpha_2 + \cos^2 \alpha_3 = 1$,

определим угол $\alpha_3 = \arccos \sqrt{1 - \cos^2 \alpha_1 - \cos^2 \alpha_2}$ и сведем таким образом данную задачу к задаче 1.

Задача 3. Заданы: $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$, а также координаты точки P (рис. 10.4).

Найти: $\alpha_1 - ?$

Решение. Задача решается в обратном порядке по отношению к зад. 1.

6. Можно ли указать на диаграмме Мора вектор напряжений? \Rightarrow На рис. 10.5 отрезок OP представляет собой вектор напряжений, удовлетворяющий условию (7.2). Здесь $OA = \sigma_\tau$, $OB = \sigma_N$.

2. Понятие о схемах напряженного состояния в ОМД введено С.И. Губкиным. Хотя компоненты тензора напряжений зависят от координат, в ряде случаев можно принять, что схема главных напряжений одинакова для большинства точек тела и характеризует напряженное состояние деформируемого тела. Схема изображается кубиком с указанием стрелками наличия и направления главных напряжений (рис. 10.6).

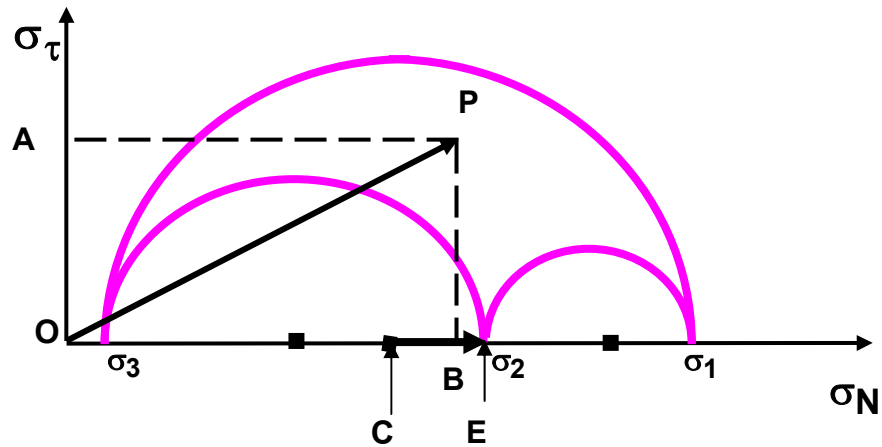


Рис. 10.5. К определению вектора напряжений и показателя напряженного состояния

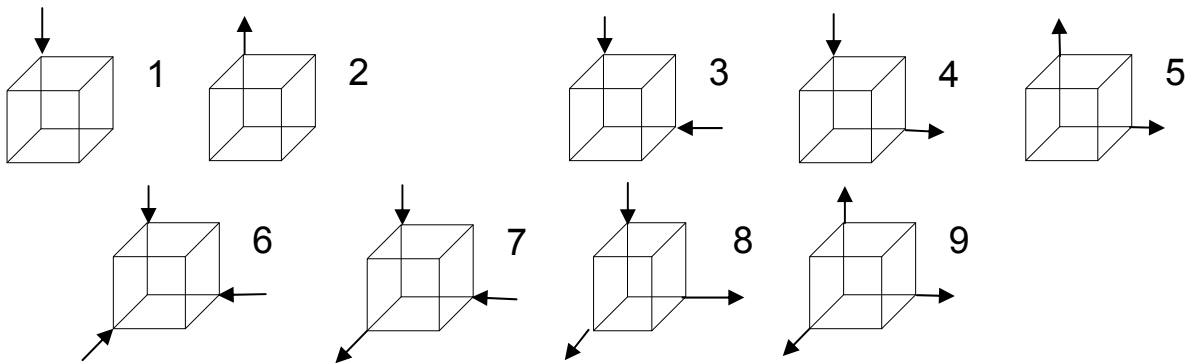


Рис. 10.6. Схемы главных напряжений: 1), 2) – линейная схема; 3), 4), 5) – плоская схема; 6), 7), 8), 9) – объемная схема

Подобно тензору напряжений, схемы главных напряжений можно разложить на две – схему шарового тензора и схему девиатора. Имеется две схемы шарового тензора. У девиатора – две объемных схемы и одна плоская. Если на схеме присутствуют напряжения одного знака, то они называются одноименными. В противном случае – разноименными.

Контрольные вопросы и упражнения

1. Сформулировать постановку задачи перехода к главным напряжениям.
2. Изобразить разложение вектора напряжений на нормальную и касательную компоненты.
3. Записать уравнение связи модуля вектора напряжений с его нормальной и касательной компонентами.
4. Дать тензорную связь координатных компонент вектора напряжений и нормальной его компоненты с компонентами направляющего вектора и тензора напряжений.
5. Записать группу трех уравнений, умножаемых на коэффициенты **a**, **b**, **c**.
6. Представить обобщенное уравнение с использованием функции квадратного трехчлена $f(z)$.
7. Записать разложение квадратного трехчлена на множители.
8. Определить неизвестные коэффициенты **a**, **b**, **c**.
9. Получить уравнения для квадратов всех компонент направляющего вектора в терминах напряжений.
10. Проверить тождество для произведения разностей нормальной компоненты вектора напряжений и ее координатной компоненты.
11. Привести уравнения для квадратов направляющих косинусов к уравнениям окружностей для напряжений.
12. При каком условии знаки «довесков» к радиусам имеют указанные знаки.
13. Дать формулы «довесков» к радиусам и рассуждениями установить их знаки.
14. Изобразить диаграмму Мора с указанием характерных точек и области решения.
15. Для каждой из окружностей диаграммы укажите, какая компонента направляющего вектора равна нулю.
16. Установите значение компонент направляющего вектора в вершинных точках всех окружностей аналитически.
17. Показать изменение уравнений окружностей Мора при трансляционном преобразовании координат (напряжений).
18. Изобразить схему графического определения среднего напряжения по диаграмме Мора.
19. Провести доказательство графического представления среднего напряжения на диаграмме Мора аналитически.

20. Как по двум заданным углам между направляющим вектором и двумя осями координат определить соответствующую им точку в области решений на диаграмме Мора?
21. Как определить компоненты направляющего вектора, если задана точка на диаграмме Мора? Изложите графо-аналитический подход.
22. Дать схему аналитического определения компонент направляющего вектора, если заданы численно нормальная и касательная компоненты вектора напряжений.
23. Как расположены направляющие векторы в точках касания окружностей (кругов) Мора?
24. Как принято изображать схему главных напряжений?
25. Изобразить схемы главных напряжений для одномерного, плоского и объемного случаев.
26. Изобразить две схемы шарового тензора.
27. Изобразить две схемы девиатора.

Лекция 11. Плоская задача теории пластичности

=====

1. Плоская задача теории пластичности. 2. Переход от главных осей к произвольным. 3. Интерпретация плоского напряженного состояния в терминах кругов Мора.

=====

I. В ТОМД имеется ряд задач, где все напряжения могут не зависеть от одной из координат. Такими задачами являются, например, задача об осадке длинной полосы, задача о раздаче цилиндрической заготовки или вытяжке деталей (фланец заготовки). Исходные посылки для **плоской задачи** (рис. 11.1):

1. Напряжения не зависят от одной из координат, например, от x_2 :

$$\sigma_{ij} = f_{ij}(x_1). \quad (11.1)$$

2. Касательные напряжения, содержащие индекс 2, равны нулю.

$$\sigma_{2j} = \sigma_{j2} = 0, \quad j \neq 2. \quad (11.2)$$

3. а) Плоское напряженное состояние

$$\sigma_{22} = 0, \quad \varepsilon_{22} \neq 0; \quad (11.3)$$

б) плоское деформированное состояние

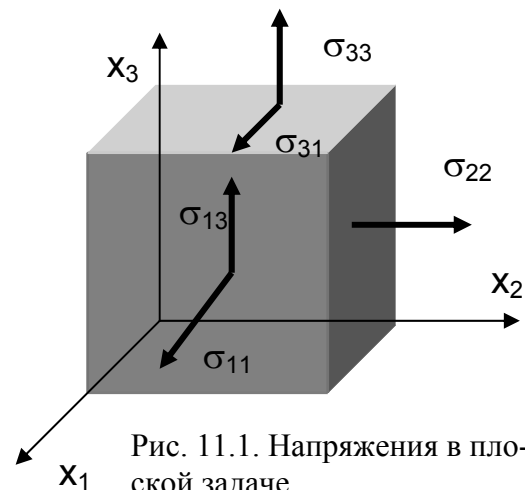


Рис. 11.1. Напряжения в плоской задаче

$$\sigma_{22} = \frac{\sigma_{11} + \sigma_{33}}{2}, \quad \varepsilon_{22} = 0. \quad (11.4)$$

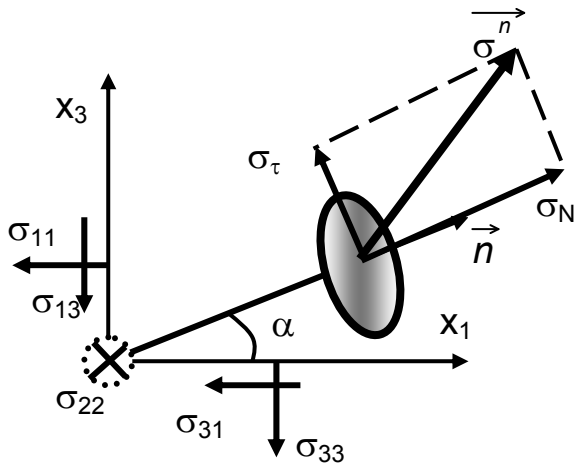


Рис. 11.2. Расположение компонент напряжений в плоской задаче

Вектор напряжений на произвольной площадке имеет компоненты: σ_N и σ_τ , подлежащие определению, если задан тензор напряжений и направляющий вектор в системе координат x_1 и x_3 (рис. 11.2). Т. к. рассматриваем плоский случай, то $n_2 = 0$. Из соотношения: $n_i^2 = 1 \Rightarrow n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = 1$. Ввиду рассмотрения плоского случая:

$$n_1^2 + n_3^2 = 1. \quad (11.5)$$

Из рис. 11.2 видно, что $n_1 = \cos \alpha$, а с учетом (11.5)

$$n_3 = \sin \alpha.$$

Очевидно, справедливы следующие соотношения, полученные ранее:

$$(\vec{\sigma}^n)^2 = (\sigma_1^n)^2 + (\sigma_2^n)^2 + (\sigma_3^n)^2; \quad \sigma_\tau^2 = (\vec{\sigma}^n)^2 - \sigma_N^2. \quad (11.6)$$

Для нахождения σ_τ найдем предварительно $\sigma_i^n = \sigma_{ij}n_j$ и, подставляя их значения в формулы (11.6), получим:

$$\sigma_1^n = \sigma_{ij}n_j = \sigma_{11}n_1 + \sigma_{13}n_3; \quad \sigma_3^n = \sigma_{3j}n_j = \sigma_{31}n_1 + \sigma_{33}n_3;$$

$$\left(\vec{\sigma}^n\right)^2 = (\sigma_{11}n_1 - \sigma_{13}n_3)^2 + (\sigma_{31}n_1 + \sigma_{33}n_3)^2 = \left\langle \begin{array}{l} \text{переход к} \\ \text{главным} \\ \text{напряж.} \end{array} \right\rangle = \sigma_1^2 n_1^2 + \sigma_3^2 n_3^2;$$

$$\sigma_N = \sigma_{1j}n_1n_j + \sigma_{3j}n_3n_j = \sigma_{11}n_1^2 + 2 \cdot \sigma_{13}n_1n_3 + \sigma_{33}n_3^2 = \left\langle \begin{array}{l} \text{переход к} \\ \text{главным} \\ \text{напряж.} \end{array} \right\rangle =$$

$$= \sigma_1 n_1^2 + \sigma_3 n_3^2 = \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2} + \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \cdot \cos 2\alpha.$$

$$\sigma_\tau^2 = \sigma_1^2 n_1^2 + \sigma_3^2 n_3^2 - \sigma_1^2 n_1^4 - \sigma_3^2 n_3^4 - 2\sigma_1\sigma_3 n_1^2 n_3^2 =$$

$$= \sigma_1^2 n_1^2 (1 - n_1^2) + \sigma_3^2 n_3^2 (1 - n_3^2) - 2\sigma_1\sigma_3 n_1^2 n_3^2 = n_1^2 n_3^2 (\sigma_1 - \sigma_3)^2 =$$

$$= 4n_1^2 n_3^2 \left(\frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}\right)^2 = (2 \sin \alpha \cos \alpha)^2 \left(\frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}\right)^2 = \left[\frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \sin 2\alpha\right]^2;$$

$$\sigma_{\tau} = \pm \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \sin 2\alpha. \quad (11.7)$$

Касательные напряжения (11.7) принимают предельные значения при $\sin 2\alpha = 1 \Rightarrow \alpha = 45^\circ$.

Главные напряжения. Тензор напряжений для плоского напряженного состояния трансформируется следующим образом:

$$\begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{13} \\ \sigma_{31} & \sigma_{33} \end{pmatrix} = T_{\sigma}. \quad (11.8)$$

Для определения главных напряжений, аналогично (8.13), с учетом (11.8) нужно составить уравнение: $\begin{vmatrix} \sigma_{11} - \sigma & \sigma_{13} \\ \sigma_{31} & \sigma_{33} - \sigma \end{vmatrix} = 0$, откуда следует алгебраическое уравнение:

$$\sigma^2 - (\sigma_{11} + \sigma_{33}) \cdot \sigma + \sigma_{11} \cdot \sigma_{33} - \sigma_{13}^2 = 0. \quad (11.9)$$

Решение (11.9) дает следующие значения главных напряжений:

$$\begin{aligned} (\sigma_1, \sigma_3) &= \frac{\sigma_{11} + \sigma_{33}}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_{11} - \sigma_{33}}{2}\right)^2 + \sigma_{13}^2 - \sigma_{11}\sigma_{33}}; \\ (\sigma_1, \sigma_3) &= \frac{\sigma_{11} + \sigma_{33}}{2} \pm \sqrt{\frac{(\sigma_{11} - \sigma_{33})^2 + 4\sigma_{13}^2}{2}}. \end{aligned} \quad (11.10)$$

2. Пусть заданы главные напряжения σ_1 и σ_3 в осях **1** и **2** (рис. 11.3). Найдем компоненты напряжений в осях, повернутых на некий угол α по отношению к направлению **1**. Подход к вычислению напряжений следующий:

1. На оси X_1 выбираем точку и направляющий вектор, совпадающий с данной осью. 2. Определяем компоненту σ_N на данном направлении. 3.

Идентифицируем σ_N с напряжением σ_{11} . 4. Поворотом оси X_1 на 90° осуществляем переход от σ_{11} к σ_{33} . 5. Касательные напряжения σ_{13} отождествляем с σ_{τ} .

Пример выполнения расчета.

Заданы: σ_1, σ_3 и их направления. Требуется определить $\sigma_{11}, \sigma_{33}, \sigma_{13}$ в осях, повернутых на угол α по отношению к заданным.

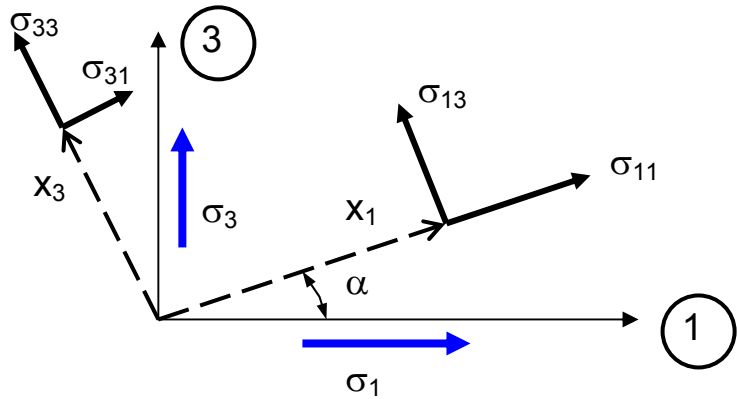


Рис. 11.3. Переход к произвольной системе координат x_1-x_3

Решение.

1. Располагаем новые оси, как показано на рис. 11.3.

$$2. \sigma_N = \sigma_{ij}n_i n_j = \sigma_{1j}n_1 n_j + \sigma_{3j}n_3 n_j = \sigma_{11}n_1 n_1 + \sigma_{13}n_1 n_3 + \sigma_{31}n_3 n_1 + \sigma_{33}n_3 n_3 = \\ = \sigma_1 n_1^2 + \sigma_3 n_3^2; \{\sigma_{i2} = 0\}.$$

$$3. \sigma_{11} = \sigma_N = \sigma_1 n_1^2 + \sigma_3 n_3^2.$$

Направляющие косинусы: $n_1 = \cos \alpha$; $n_3 = \sin \alpha$.

$$\sigma_{11} = \sigma_1 \cos^2 \alpha + \sigma_3 \sin^2 \alpha = \sigma_1 \left(\frac{1 + \cos 2\alpha}{2} \right) + \sigma_3 \left(\frac{1 - \cos 2\alpha}{2} \right).$$

$$\sigma_{11} = \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2} + \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \cos 2\alpha.$$

$$4. \sigma_{33} = \sigma_{11} \left(\alpha + \frac{\pi}{2} \right) = \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2} - \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \cos 2\alpha.$$

$$5. \sigma_{13} = \sigma_\tau = \pm \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \sin 2\alpha.$$

Следовательно, при переходе $\sigma_1, \sigma_3 \Rightarrow \sigma_{11}, \sigma_{33}, \sigma_{13} \Rightarrow$ получаем:

$$\sigma_{11} = \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2} + \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \cos 2\alpha;$$

$$\sigma_{33} = \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2} - \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \cos 2\alpha; \quad (11.11)$$

$$\sigma_{13} = \pm \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \sin 2\alpha.$$

3. Вид плоского напряженного состояния допускает интерпретацию в терминах кругов Мора. Для этого введем обозначения:

$$\sigma_{\text{ср}} = \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2} = \frac{\sigma_{11} + \sigma_{33}}{2}; \quad \sigma_\tau^{\text{max}} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}. \quad \text{Тогда формулы (11.11) примут вид:}$$

$$\sigma_{11} = \sigma_{\text{ср}} + \sigma_\tau^{\text{max}} \cos 2\alpha;$$

$$\sigma_{33} = \sigma_{\text{ср}} - \sigma_\tau^{\text{max}} \cos 2\alpha; \quad (11.12)$$

$$\sigma_{13} = \pm \sigma_\tau^{\text{max}} \sin 2\alpha.$$

а. Угловые характеристики

Из анализа круга Мора (см. формулу (10.10)) при $n_2 = 0$ получаем:

$$\{n_2 = 0\}: \quad \sigma_\tau^2 + \left(\sigma_N - \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2} \right)^2 = \left(\frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \right)^2. \quad (11.13)$$

С учетом введенных выше обозначений уравнение окружности (11.13) имеет вид

$$\sigma_\tau^2 + (\sigma_N - \sigma_{\text{ср}})^2 = (\sigma_\tau^{\text{max}})^2. \quad (11.14)$$

Возьмем некую точку Р на окружности (рис. 11.4), для которой:

$$\cos \gamma = \frac{\sigma_N - \sigma_{\text{ср}}}{\sigma_{\tau}^{\text{max}}};$$

$$\sigma_N = \sigma_{\text{ср}} + \sigma_{\tau}^{\text{max}} \cos \gamma.$$

Объявляя, как в предыдущем случае, $\sigma_N = \sigma_{11}$ и сравнивая последнее значение σ_N и σ_{11} из (11.11), получим: $\gamma = 2\alpha$. Данный результат уже был использован ранее (см. лекц. 10, рис. 10.4) без доказательства.

б. Вектор напряжений

На рис. 11.4 вектор напряжений представляется отрезком, соединяющим данную точку Р с началом координат О, что вполне согласуется с формулой (7.2).

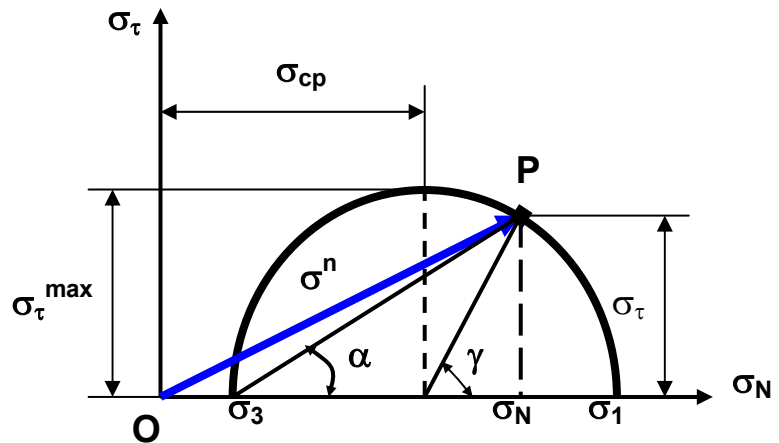


Рис. 11.4. Диаграмма Мора для плоского напряженного состояния

Контрольные вопросы и упражнения

1. Какая задача называется плоской?
2. Приведите примеры задач формообразования, сводящиеся к плоским задачам.
3. Изобразите расположение напряжений на выделенном кубике в случае плоской задачи.
4. Какие касательные напряжения равны нулю, если напряжения не зависят от координаты x_1 ; x_2 ?
5. Объясните различие между плоским напряженным и плоским деформированным состоянием; чему равны напряжения и деформации вдоль характерной оси в том и другом случае?
6. Сформулируйте постановку задачи определения нормального и касательного напряжений на произвольной площадке.
7. Изобразите расположение компонент напряжений в плоской задаче.
8. Запишите соотношение между компонентами направляющего вектора в плоской задаче.
9. Из каких соотношений и как определяется нормальная составляющая вектора напряжений для плоской задачи.
10. Произведите вычисление касательной составляющей вектора напряжений для плоской задачи.

11. При каких значениях угла касательная составляющая вектора напряжений максимальна? Сравните с октаэдрическими касательными напряжениями.
12. Дайте обоснование и сделайте переход от тензора напряжений объемной задачи к тензору напряжений плоской задачи.
13. Какое уравнение является исходным для определения главных напряжений плоской задачи? Запишите его через определитель и в алгебраической форме.
14. Напишите выражения главных напряжений через компоненты исходного тензора напряжений.
15. Изобразите схему для иллюстрации перехода от главных напряжений к напряжениям в произвольной системе координат.
16. Дайте алгоритм такого перехода.
17. Произведите вычисление нормальной составляющей вектора напряжений для условия плоской задачи.
18. Произведите вычисление σ_{11} , σ_{33} , σ_{13} через главные напряжения и угол.
19. Изобразите диаграмму Мора для плоской задачи.
20. Запишите уравнение окружности с использованием среднего и максимального касательного напряжений для плоской задачи.
21. Докажите, что внутренний угол круга Мора вдвое больше угла наклона оси при переходе к исходным значениям напряжений (аналитически).
22. Можно ли это доказать сугубо геометрическим способом?
23. Дайте аналитический вывод значений компонент направляющего вектора, если заданы главные напряжения, нормальная и касательная составляющие вектора напряжений.
24. Изобразите схему осадки длинной полосы, расставьте напряжения. Какое состояние будет иметь место в этом случае: плоское деформирование или плоское напряженное и почему?
25. К какой задаче приводит операция растяжения плоского листа во взаимно перпендикулярных направлениях нормально к торцам? Сделайте эскиз, изобразите напряжения.
26. Как будут располагаться главные напряжения по поперечному сечению гидроцилиндра под действием давления масла? Сделайте эскиз.

Лекция 12. Осесимметричное напряженное состояние

=====

1. Осесимметричное напряженное состояние. 2. Уравнение равновесия элемента тонкостенной оболочки.

=====

1. Когда деформируемая заготовка является телом вращения (рис. 12.1), к поверхности которого приложены распределенные нагрузки, расположенные симметрично относительно его оси и одинаковые во всех меридиональных сечениях, возникает **осесимметричное напряженное состояние**.

Примерами могут служить выдавливание, обжим и раздача труб, осадка цилиндрической заготовки, ее прошивка, волочение проволоки и т. д.

Для теоретического анализа переходят от декартовой системы координат к цилиндрической, где обычно ось z совпадает с осью аппликата x_3 исходной декартовой системы. В плоскости x_1x_2 исходной системы точка теперь определяется координатами ρ и θ , которые связаны известными соотношениями с декартовыми координатами. На рис. 12.2 показана генерация локальной цилиндрической системы координат, которая переносом в центр старой системы может быть сделана глобальной. В цилиндрической системе координат тензор напряжений будет иметь следующий вид

$$T_{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_{\rho\rho} & \sigma_{\rho\theta} & \sigma_{\rho z} \\ \sigma_{\theta\rho} & \sigma_{\theta\theta} & \sigma_{\theta z} \\ \sigma_{z\rho} & \sigma_{z\theta} & \sigma_{z z} \end{pmatrix}$$

Для осесимметричной задачи нет зависимости напряжений от θ . Производные от компонент напряжений по этой координате дают всегда нуль. В плоскостях, проходящих через ось z , нет касательных напряжений вследствие симметричности тела и симметрии внешней нагрузки, следовательно, касательные напряжения $\sigma_{z\theta} = \sigma_{\rho\theta} = \sigma_{\theta z} = \sigma_{\theta\rho} = 0$. В этом случае тензор напряжений имеет вид

$$T_{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_{\rho\rho} & 0 & \sigma_{\rho z} \\ 0 & \sigma_{\theta\theta} & 0 \\ \sigma_{z\rho} & 0 & \sigma_{z z} \end{pmatrix} \quad (12.1)$$

На рис. 12.3 представлены компоненты тензора (12.1) с приращениями только на передних площадках элемента осесимметричной заготовки.

На противоположных площадках элемента направление действия напряжений будет обратным (см. лекцию 7). Для установления уравнений равновесия определим предварительно площади граней элемента, на которых действуют напряжения:

$$\begin{aligned} dA_{\rho} &= dz \cdot \rho \cdot d\theta ; & dA_{\rho+d\rho} &= dz \cdot (\rho + d\rho) \cdot d\theta ; & dA_{\theta} &= d\rho \cdot dz ; \\ dA_z &= \frac{1}{2} \cdot d\rho \cdot d\theta \cdot (\rho + \rho + d\rho) \approx \rho \cdot d\rho \cdot d\theta \end{aligned} \quad (12.2)$$

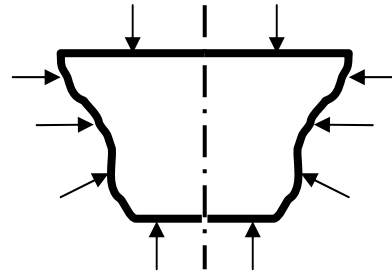


Рис. 12.1. Действие сил на осесимметричное тело

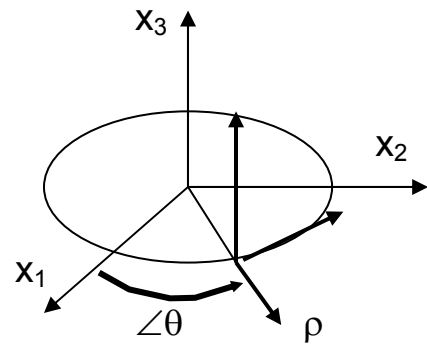


Рис. 12.2. Локальная система цилиндрических координат

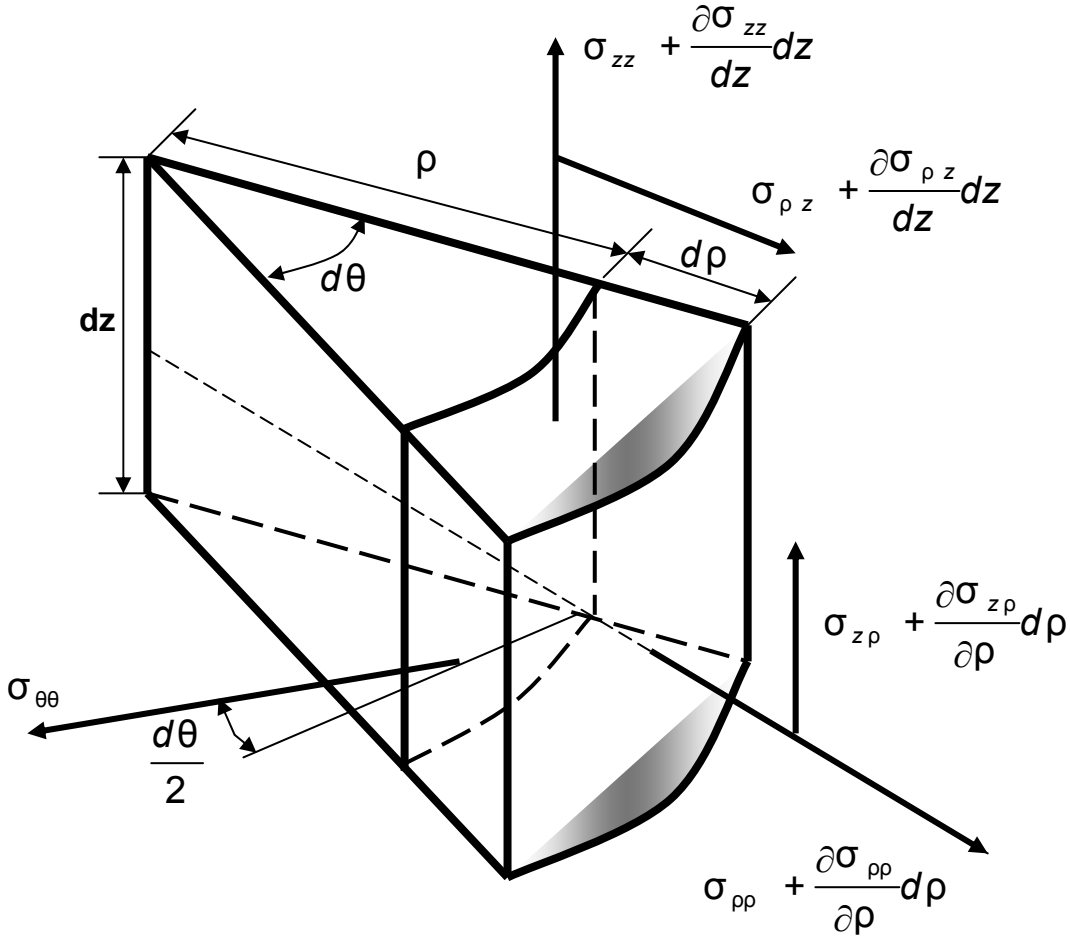


Рис. 12.3. Напряжения на площадках элемента осесимметричной заготовки

Проецируя силы на оси ρ и z (см. рис. 12.2 и 12.3) с учетом (12.2) получим уравнения равновесия в цилиндрической системе координат:

$$\frac{\partial \sigma_{\rho\rho}}{\partial \rho} + \frac{\partial \sigma_{z\rho}}{\partial z} + \frac{\sigma_{\rho\rho} - \sigma_{\theta\theta}}{\rho} = 0. \quad (12.3)$$

$$\frac{\partial \sigma_{z\rho}}{\partial \rho} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + \frac{\sigma_{z\rho}}{\rho} = 0. \quad (12.4)$$

Очевидно, проекция на ось θ новых результатов не дает.

Частный случай: **цилиндрическая заготовка с симметричным нагружением** ($\sigma_{ij} \neq f(z)$ и $\sigma_{z\rho} = 0$). В этом случае остается только одно уравнение:

$$\frac{\partial \sigma_{\rho\rho}}{\partial \rho} + \frac{\sigma_{\rho\rho} - \sigma_{\theta\theta}}{\rho} = 0. \quad (12.5)$$

Очевидно, напряжения в уравнении (12.5) представляют собой главные напряжения, а потому уравнение (12.5) принимает вид

$$\frac{\partial \sigma_{\rho}}{\partial \rho} + \frac{\sigma_{\rho} - \sigma_{\theta}}{\rho} = 0. \quad (12.6)$$

2. Уравнениями равновесия тонкостенных осесимметричных оболочек пользуются при рассмотрении операций листовой штамповки, в частности, гибки, вытяжки, отбортовки, обжима и раздачи. Введем систему координат (рис. 12.4), связанную с центром выделенного элемента. Выберем два преимущественных направления:

- а) нормальное к площадке;
- б) меридиональное (вдоль меридиана).

Сделаем предположение относительно геометрии оболочки и сил, действующих на элемент:

- 1) Нормальные напряжения на контактных поверхностях значительно меньше напряжения текучести.
- 2) Касательные напряжения на контактной поверхности определяются соотношением: $\tau_k = \mu \cdot \sigma_n$ (σ_n – нормальное контактное напряжение; μ – коэффициент трения).
- 3) Схема напряженного состояния близка к плоской.
- 4) Изменением кривизны в широтных сечениях пренебрегаем.
- 5) В пределах выделенного элемента кривизна срединной поверхности в меридиональных сечениях постоянна.
- 6) Для выделенного элемента справедливы уравнения равновесия для безмоментной теории оболочек.
- 7) Толщина заготовки постоянна и значительно меньше радиусов кривизны R_{ρ} и R_{θ} в меридиональном и широтном

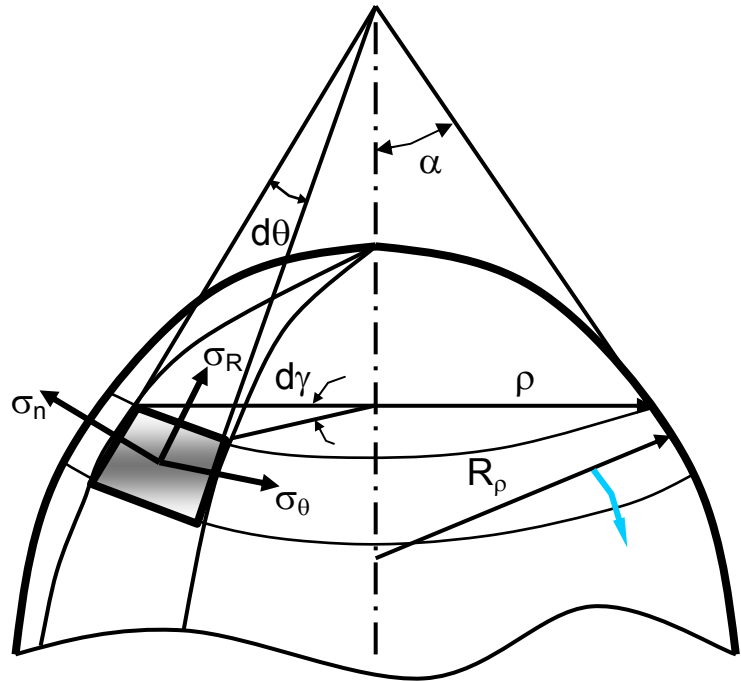


Рис. 12.4. Деформирование осесимметричной заготовки

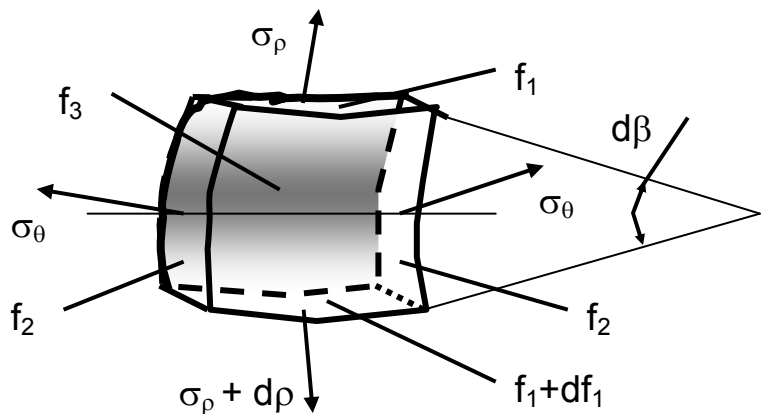


Рис. 12.5. Элемент оболочки

сечениях соответственно.

- 8) Меридиональные напряжения σ_ρ и широтные напряжения σ_θ равномерно распределены по толщине заготовки и являются главными нормальными напряжениями.
- 9) Все нормальные напряжения считаем положительными, а касательные напряжения совпадают по направлению с проекцией напряжений σ_θ на касательную к образующей.
- 10) Все элементарные силы будем относить к срединной поверхности.

Определим площади граней выделенного элемента (рис. 12.5):

$$f_1 = S \cdot \rho \cdot d\gamma = R_\rho \cdot d\beta \cdot S = S \cdot \frac{\rho}{\sin \alpha} \cdot d\theta; \quad f_2 = S \cdot R_\rho \cdot d\alpha; \quad f_3 = R_\rho \cdot d\alpha \cdot R_\theta \cdot d\beta.$$

Проекция сил на выбранные направления:

$$n: \sigma_n \cdot f_3 - 2 \cdot \sigma_\theta \cdot f_2 \cdot \frac{d\beta}{2} - 2 \cdot \sigma_\rho \cdot f_1 \cdot \frac{d\alpha}{2} = 0; \quad (12.7)$$

$$\tau: -\sigma_n \cdot \mu \cdot f_3 + \sigma_\rho \cdot f_1 + d(\sigma_\rho \cdot f_1) - \sigma_\rho \cdot f_1 - 2\sigma_\theta \cdot f_2 \cdot \frac{d\alpha}{2} = 0.$$

Выразим длину элемента в широтном сечении:

$$l = \rho \cdot d\gamma = \frac{\rho}{\cos \alpha} \cdot d\beta = \frac{\rho}{\sin \alpha} \cdot d\theta; \Rightarrow d\gamma = \frac{d\beta}{\cos \alpha} = \frac{d\theta}{\sin \alpha}. \quad (12.8)$$

Представим f_1, f_2, f_3 через γ :

$$f_1 = s \cdot R_\theta \cdot d\beta; \quad f_2 = s \cdot R_\rho \cdot d\alpha = s \cdot \frac{d\rho}{\sin \alpha}; \quad f_3 = R_\rho \cdot R_\theta \cdot d\alpha \cdot d\beta = \rho \cdot d\gamma \cdot \frac{d\rho}{\sin \alpha}.$$

$$d(\sigma_\rho \cdot f_1) = d\sigma_\rho \cdot f_1 + \sigma_\rho \cdot df_1; \quad df_1 = s \cdot d\rho \cdot d\gamma;$$

$$d\sigma_\rho \cdot f_1 + \sigma_\rho \cdot df_1 - \sigma_\theta \cdot f_2 \cdot d\alpha - \sigma_n \cdot \mu \cdot f_3 = 0; \quad \text{или}$$

$$\sigma_n \cdot R_\rho \cdot R_\theta \cdot d\alpha \cdot d\beta - \sigma_\rho \cdot s \cdot R_\theta \cdot d\beta \cdot d\alpha - \sigma_\theta \cdot s \cdot R_\rho \cdot d\alpha \cdot d\beta = 0, \quad (12.9)$$

откуда получаем:

$$n: \frac{\sigma_n}{S} - \frac{\sigma_\theta}{R_\theta} - \frac{\sigma_\rho}{R_\rho} = 0.$$

Это – **уравнение Лапласа** для безмоментной теории оболочек.

С учетом (12.8) и (12.9) второе уравнение из (12.7) примет вид

$$\sigma_\rho \cdot s \cdot d\rho \cdot d\gamma + s \cdot \rho \cdot d\gamma \cdot d\sigma_\rho - \sigma_\theta \cdot s \cdot \frac{d\rho}{\sin \alpha} \cdot \sin \alpha \cdot d\gamma - \mu \cdot \sigma_n \cdot \rho \cdot d\gamma \cdot \frac{d\rho}{\sin \alpha} = 0.$$

Отсюда после элементарных преобразований получаем последовательно с использованием уравнения Лапласа для безмоментной теории оболочек:

$$\begin{aligned} \tau: \quad \rho \cdot \frac{d\sigma_\rho}{d\rho} + \sigma_\rho - \sigma_\theta - \frac{\mu \cdot \rho}{\sin \alpha} \cdot \frac{\sigma_n}{S} &= 0; \\ \rho \cdot \frac{d\sigma_\rho}{d\rho} + \sigma_\rho - \sigma_\theta - \frac{\mu \cdot \rho}{\sin \alpha} \cdot \left(\frac{\sigma_\rho}{R_\rho} + \frac{\sigma_\theta}{R_\theta} \right) &= 0. \end{aligned} \quad (12.10)$$

Уравнение (12.10) есть **уравнение равновесия осесимметричной оболочки без учета утонения**. Для учета утонения вводят дополнительный член, с учетом которого уравнение (12.10) имеет вид

$$\rho \cdot \frac{\mathbf{d} \cdot \sigma_{\rho}}{\mathbf{d} \cdot \rho} + \sigma_{\rho} \cdot \left(1 + \frac{\rho \cdot \mathbf{dS}}{\mathbf{S} \cdot \mathbf{d}\rho} \right) - \sigma_{\theta} - \frac{\mu \cdot \rho}{\sin \alpha} \cdot \left(\frac{\sigma_{\rho}}{R_{\rho}} + \frac{\sigma_{\theta}}{R_{\theta}} \right) = 0. \quad (12.11)$$

Уравнения (12.10), (12.11) используются для анализа процессов листовой штамповки.

Контрольные вопросы и упражнения

1. Дайте определение осесимметричного напряженного состояния.
2. Изобразите осесимметричное тело и действующие на него силы.
3. Какие операции ОМД могут служить примерами схем осесимметричных заготовок?
4. В какой системе координат целесообразнее проводить анализ осесимметричных деталей?
5. Изобразите переход от декартовой к цилиндрической системе, запишите уравнения связи координат этих двух систем.
6. Как представляется тензор напряжений в цилиндрической системе координат?
7. От какой координаты не зависят напряжения в осесимметричной задаче?
8. Как влияет симметрия тела и приложенных сил на касательные напряжения?
9. Какой вид имеет тензор напряжений в случае осесимметричного тела?
10. Изобразите компоненты тензора с приращениями на гранях элементарного объема в цилиндрической системе координат.
11. Запишите выражения для площадей элементарного объема в цилиндрической системе координат.
12. Запишите проекции сил на оси ρ и z .
13. Преобразуйте уравнения проекций сил к конечным уравнениям равновесия в цилиндрической системе координат.
14. Покажите, что в случае симметричного нагружения уравнения равновесия сводятся только к одному уравнению.
15. Где используют уравнения равновесия тонкостенных осесимметричных оболочек?
16. Какие преимущественные направления рассматривают в случае осесимметричных оболочек?
17. Изобразите схему деформирования осесимметричной оболочки.
18. Какие допущения принимают относительно нормальных и касательных напряжений на контактных поверхностях?
19. Почему схему напряженного состояния можно принять близкой к плоской?
20. Что является основанием для принятия допущения о слабом изменении кривизны оболочки в широтном и меридиональном направлениях?

21. Почему можно не учитывать моменты при рассмотрении выделенного элемента оболочки?
22. На что влияет допущение о постоянности и малости толщины стенки оболочки по сравнению с радиусами ее кривизны в меридиональном и широтном сечениях?
23. Как направлены главные напряжения в произвольной точке оболочке; изобразите их направления на элементе оболочки.
24. К какой поверхности оболочке относят силы при рассмотрении условий равновесия?
25. Запишите формулы для определения площади граней выделенного элемента.
26. Запишите проекции сил на выбранные направления.
27. Запишите формулу определения длины линейного элемента в широтном направлении с графической иллюстрацией.
28. Выразите площади граней элемента через радиусы кривизны оболочки.
29. Выведите уравнение Лапласа.
30. Сделайте вывод уравнения равновесия осесимметричной оболочки.
31. Как учесть ее утонение вследствие деформирования?

Раздел 4. ДЕФОРМАЦИИ И СКОРОСТИ ДЕФОРМАЦИЙ

Лекция 13. Движение сплошной среды. Деформации

- =====
1. Движение сплошной среды; переменные Эйлера и Лагранжа.
 2. Компоненты перемещений и деформаций; тензор деформаций; его шаровая и девиаторная составляющие.
 3. Условие постоянства объема.
 4. Интенсивность деформаций.
- =====

1. Формоизменение с точки зрения деформаций можно рассматривать как два состояния: начальное и конечное, не интересуясь промежуточным состоянием. Это – **теория конечных деформаций**. Если же интересоваться в математическом и физическом описании формоизменения непрерывным изменением среды в зависимости от времени (или какого-либо другого параметра нагружения), это — **теория пластического течения**. Существуют два подхода к изучению движения сплошной среды: **подход Лагранжа и Эйлера**.

На рис.13.1 дано тело с фиксированной точкой P_0 в начальный момент времени $t=0$. С течением времени тело деформируется, при этом в момент $t=t_1$ точка P_0 переходит в положение P , а начальная система координат с базисом $\{\vec{e}_i\}$ переходит в систему с базисом $\{\vec{e}_i^*\}$, начало которой определяется

вектором \vec{b} по отношению к начальной системе координат. При этом новая система координат, будучи связанной с телом, испытывает поворот на некоторый угол. Вектор \vec{u} называется **вектором перемещений** и определяется так:

$$\vec{u} = \vec{b} + \vec{r}' - \vec{r} \quad (13.1)$$

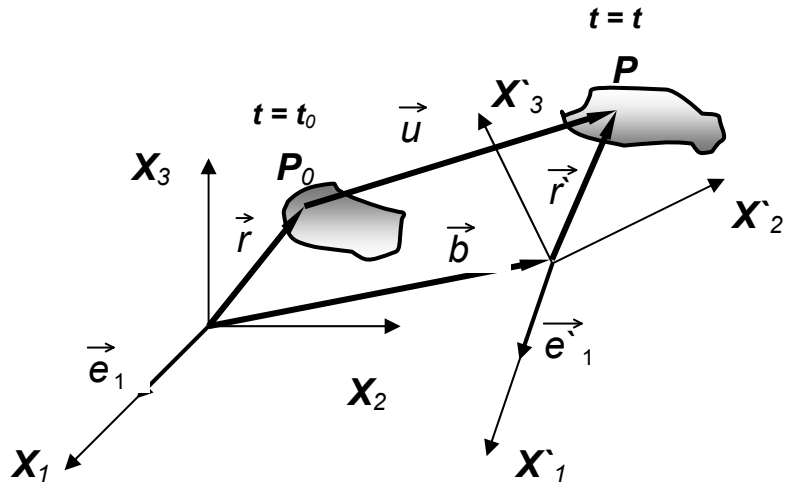


Рис. 13.1. Деформация тела

Если считать, что обе системы можно совместить (например, деформируемая заготовка в матрице), то $\vec{b} \equiv \mathbf{0}$ и тогда уравнение (1) представимо в виде:

$$\vec{u} = \vec{r}' - \vec{r} \quad (13.2)$$

где \vec{r}' – радиус-вектор точки P в системе с базисом $\{\vec{e}_i'\}$; \vec{r} – радиус-вектор точки P₀, связанный с системой, имеющей базис $\{\vec{e}_i\}$.

Движение частиц деформируемого тела можно описывать так:

$$\vec{r}' = \vec{r}'(\vec{r}, t), \quad \text{или} \quad \mathbf{x}'_i = \mathbf{x}'_i(\vec{r}, t) \quad (13.3)$$

Уравнения (13.3) устанавливают соответствие между точками в начальной конфигурации в момент $t = 0$ и их положением в текущем состоянии $t = t$. Предполагается, что это соответствие взаимно однозначно и непрерывно с непрерывными частными производными требуемого порядка. Это подход Лагранжа, а переменные \mathbf{x}'_i называются переменными Лагранжа.

Движение частиц можно задать и в виде

$$\vec{r} = \vec{r}(\vec{r}', t) \quad \text{или} \quad \mathbf{x}_i = \mathbf{x}_i(\vec{r}', t) \quad (13.4)$$

Уравнения (13.4) выражают подход Эйлера, в котором можно идентифицировать начальные положения частиц, если известны их положения в момент времени $t = t$. Переменные \mathbf{x}_i называются переменными Эйлера.

2. Из уравнения (13.2) следует, что $\mathbf{u}_i = \mathbf{x}_i' - \mathbf{x}_i$, а из (13.3) – $\mathbf{x}_i' = \mathbf{x}_i'(\mathbf{x}_i)$, если рассмотрение отнести к фиксированному моменту времени (т. е. использовать теорию конечных деформаций). Тогда можно записать

$$\mathbf{u}_i = \mathbf{u}_i(\mathbf{x}_k); \quad d\mathbf{u}_i = d\mathbf{x}_i' - d\mathbf{x}_i; \quad d\mathbf{u}_i = \frac{\partial \mathbf{u}_i}{\partial \mathbf{x}_k} \cdot d\mathbf{x}_k. \quad (13.5)$$

Найдем расстояние между двумя точками, расположенными в теле до деформирования на расстоянии $d\mathbf{l}$, а после деформирования на расстоянии $d\mathbf{l}'$. Используя определение расстояния в декартовой системе координат, запишем соответствующие выражения:

$$d\mathbf{l} = (d\mathbf{x}_i \cdot d\mathbf{x}_i)^{1/2}; \quad d\mathbf{l}' = (d\mathbf{x}_i' \cdot d\mathbf{x}_i')^{1/2}. \quad (13.6)$$

Раскроем второе выражение в (13.6) с учетом (13.5), возведя его предварительно в квадрат:

$$\begin{aligned} (d\mathbf{l}')^2 &= d\mathbf{x}_i' \cdot d\mathbf{x}_i' = (d\mathbf{x}_i + d\mathbf{u}_i) \cdot (d\mathbf{x}_i + d\mathbf{u}_i) = d\mathbf{x}_i \cdot d\mathbf{x}_i + 2 \cdot d\mathbf{u}_i \cdot d\mathbf{x}_i + d\mathbf{u}_i \cdot d\mathbf{u}_i + \\ &+ d\mathbf{l}^2 + 2 \cdot \frac{\partial \mathbf{u}_i}{\partial \mathbf{x}_k} \cdot d\mathbf{x}_k \cdot d\mathbf{x}_i + d\mathbf{u}_i \cdot d\mathbf{u}_i = d\mathbf{l}^2 + 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \left\{ \frac{\partial \mathbf{u}_i}{\partial \mathbf{x}_k} + \frac{\partial \mathbf{u}_k}{\partial \mathbf{x}_i} + \frac{\partial \mathbf{u}_i}{\partial \mathbf{x}_k} \cdot \frac{\partial \mathbf{u}_i}{\partial \mathbf{x}_i} \right\} \cdot d\mathbf{x}_k \cdot d\mathbf{x}_i. \end{aligned} \quad (13.7)$$

Введем обозначение:

$$\varepsilon_{ik} = \frac{1}{2} \cdot \left\{ \frac{\partial \mathbf{u}_i}{\partial \mathbf{x}_k} + \frac{\partial \mathbf{u}_k}{\partial \mathbf{x}_i} + \frac{\partial \mathbf{u}_i}{\partial \mathbf{x}_k} \cdot \frac{\partial \mathbf{u}_i}{\partial \mathbf{x}_i} \right\}. \quad (13.8)$$

Здесь ε_{ik} – компоненты тензора деформаций \mathbf{T}_ε , определяемого так:

$$\mathbf{T}_\varepsilon = (\varepsilon_{ik}) = \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} & \varepsilon_{32} & \varepsilon_{33} \end{pmatrix}. \quad (13.9)$$

С учетом обозначения (13.8) выражение (13.7) можно записать в виде

$$(d\mathbf{l}')^2 = d\mathbf{l}^2 + 2 \cdot \varepsilon_{ik} \cdot d\mathbf{x}_i \cdot d\mathbf{x}_k. \quad (13.10)$$

Из определения (13.8) следует, что $\varepsilon_{ik} = \varepsilon_{ki}$, следовательно, тензор деформаций (13.9) симметричен относительно главной диагонали.

Если деформации считать малыми и пренебречь последним членом в определении (13.8), то получим компоненты тензора малых деформаций Коши:

$$\varepsilon_{ik} = \frac{1}{2} (\mathbf{u}_{i,k} + \mathbf{u}_{k,i}). \quad (13.11)$$

Тензор деформаций может быть приведен аналогично тензору напряжений (см. лекц. 8) к диагональному виду путем определения главных деформаций и соответствующих им площадок:

$$(\varepsilon_{ik} - \varepsilon \cdot \delta_{ik}) \cdot \mathbf{n}_k = \mathbf{0},$$

откуда находятся $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$, т. е. главные деформации.

Как и в случае напряжений, первый инвариант определяется так:

$$I_1(\varepsilon) = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3, \quad (13.12)$$

а второй инвариант – следующим образом:

$$I_2(\varepsilon) = \begin{vmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{31} & \varepsilon_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{32} & \varepsilon_{33} \end{vmatrix}. \quad (13.13)$$

Тензор деформаций, аналогично тензору напряжений, можно разложить на шаровую и девиаторную составляющие (см. лекцию 8):

$$\mathbf{T}_\varepsilon = \left(\mathbf{T}_\varepsilon - \varepsilon_{\text{ср}} \cdot \mathbf{E} \right) + \varepsilon_{\text{ср}} \cdot \mathbf{E} = \mathbf{D}_\varepsilon + \mathbf{T}_\varepsilon^0, \quad (13.14)$$

где \mathbf{D}_ε – девиатор тензора деформаций; \mathbf{T}_ε^0 – шаровой тензор.

$$\text{Здесь} \quad \varepsilon_{\text{ср}} = \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3}{3} = \frac{I_1 \cdot (\varepsilon)}{3}. \quad (13.15)$$

Дадим теперь интерпретацию главных деформаций, используя (13.10). $(d\mathbf{l}')^2 = (d\mathbf{l})^2 + 2 \cdot \varepsilon_{ik} \cdot d\mathbf{x}_k \cdot d\mathbf{x}_i = d\mathbf{x}_i \cdot d\mathbf{x}_k \cdot \delta_{ik} + 2 \cdot \varepsilon_{ik} \cdot d\mathbf{x}_i \cdot d\mathbf{x}_k = (\delta_{ik} + 2 \cdot \varepsilon_{ik}) \cdot d\mathbf{x}_i \cdot d\mathbf{x}_k$. Если сделать переход к главным деформациям, то последнее соотношение переписывается следующим образом:

$$(d\mathbf{l}')^2 = (1 + 2 \cdot \varepsilon_1) \cdot d\mathbf{x}_1^2 + (1 + 2 \cdot \varepsilon_2) \cdot d\mathbf{x}_2^2 + (1 + 2 \cdot \varepsilon_3) \cdot d\mathbf{x}_3^2. \quad (13.16)$$

Положим, что деформация имеет место только вдоль одной из осей, например, x_1 . Тогда, так как $dx_2 = dx_3 = 0$, из (13.16) следует:

$$d\mathbf{x}_1' = \sqrt{1 + 2 \cdot \varepsilon_1} \cdot d\mathbf{x}_1. \quad (13.17)$$

Преобразуем (13.17) к виду

$$\frac{d\mathbf{x}_1' - d\mathbf{x}_1}{d\mathbf{x}_1} = \sqrt{1 + 2\varepsilon_1} - 1. \quad (13.18)$$

Но левая часть соотношения (13.18) представляет собой ε_1 в силу определения деформации. При малой деформации $\sqrt{1 + 2 \cdot \varepsilon_1} \approx 1 + \frac{1}{2} \cdot (2 \cdot \varepsilon_1)$, т. е. правая и левая части в формуле (13.18) совпадают. Это означает, что введенные компоненты тензора, определяемого соотношением (13.8), представляют собой деформации. Если же осуществить переход к логарифмическим деформациям, то из (13.17) получим:

$$\ln \frac{dx_1'}{dx_1} = \frac{1}{2} \cdot \ln(1 + 2 \cdot \varepsilon_1). \quad (13.19)$$

Левая часть в (13.19) есть логарифмическая деформация \mathbf{e}_1 по определению, а если учесть малость ε_1 , то

$$\mathbf{e}_1 = \ln \frac{dx_1'}{dx_1} \approx \frac{1}{2} \cdot (2 \cdot \varepsilon_1) = \varepsilon_1,$$

то есть в этом случае обычная и логарифмическая деформации совпадают.

3. Как известно из опытов Бриджмена, при пластической деформации изменение объема деформируемого тела не происходит.

Пусть объем тела до деформации $dV = dx_1 \cdot dx_2 \cdot dx_3$, а после деформации – $dV' = dx_1' \cdot dx_2' \cdot dx_3'$. Подставляя в последнее выражение значения приращений координат по аналогии с (13.16), получим:

$$dV' = \sqrt{1 + 2 \cdot \varepsilon_1} \cdot \sqrt{1 + 2 \cdot \varepsilon_2} \cdot \sqrt{1 + 2 \cdot \varepsilon_3} \cdot dx_1 \cdot dx_2 \cdot dx_3 \approx (1 + \varepsilon_1) \cdot (1 + \varepsilon_2) \cdot (1 + \varepsilon_3) \cdot dV.$$

Преобразуем последнее соотношение к виду

$$\frac{dV' - dV}{dV} = (1 + \varepsilon_1) \cdot (1 + \varepsilon_2) \cdot (1 + \varepsilon_3) - 1.$$

После раскрытия скобок в правой части и удержания членов только первого порядка, будем иметь:

$$\frac{dV' - dV}{dV} = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3.$$

Если принять во внимание формулу (13.12), то можно записать с учетом несжимаемости и последнего соотношения:

$$I_1(\varepsilon) = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 = \frac{dV' - dV}{dV} = 0. \quad (13.20)$$

Формула (13.20) показывает, что первый инвариант деформаций можно интерпретировать как относительное изменение объема или как **условие несжимаемости (постоянства объема)**. Кроме того, из (13.15) и условия несжимаемости следует, что средняя деформация равна нулю, а поэтому шаровой тензор $T_\varepsilon^0 = \mathbf{0}$ в соотношении (13.14).

4. Введем понятие интенсивности деформаций:

$$\varepsilon_i = k \cdot \sqrt{I_2(\mathbf{D}_\varepsilon)}, \quad (13.21)$$

где коэффициент k подлежит определению.

На основании формулы (13.13) имеем:

$$I_2(\mathbf{D}_\varepsilon) = \frac{1}{6} \cdot \left[(\varepsilon_{11} - \varepsilon_{22})^2 + (\varepsilon_{22} - \varepsilon_{33})^2 + (\varepsilon_{33} - \varepsilon_{11})^2 + 6 \cdot (\varepsilon_{12}^2 + \varepsilon_{23}^2 + \varepsilon_{31}^2) \right]$$

Переходя в последнем выражении к главным деформациям и подставляя его в (13.21), получим

$$\varepsilon_i = \frac{k}{\sqrt{6}} \cdot \sqrt{(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)^2 + (\varepsilon_2 - \varepsilon_3)^2 + (\varepsilon_3 - \varepsilon_1)^2}. \quad (13.22)$$

Найдем значение коэффициента k из того условия, что интенсивность деформаций в случае одноосного растяжения должна совпадать с главной деформацией. Пусть ε_1 — главная деформация. Тогда $\varepsilon_2 = \varepsilon_3 = -\frac{\varepsilon_1}{2}$, если учесть условие несжимаемости. Из (13.22) следует

$$\varepsilon_i = \frac{k}{\sqrt{6}} \cdot \frac{3}{\sqrt{2}} \cdot \varepsilon_1 = \varepsilon_1, \text{ откуда } k = \frac{2}{\sqrt{3}}.$$

Подставив значение k в формулу (13.21) и учтя определение второго инварианта от тензора деформаций, получим:

$$\varepsilon_i = \frac{\sqrt{2}}{3} \cdot \sqrt{(\varepsilon_{11} - \varepsilon_{22})^2 + (\varepsilon_{22} - \varepsilon_{33})^2 + (\varepsilon_{33} - \varepsilon_{11})^2 + 6(\varepsilon_{12}^2 + \varepsilon_{13}^2 + \varepsilon_{23}^2)}. \quad (13.23)$$

Величина ε_i в формуле (13.23) представляет собой эквивалентную или осредненную деформацию в бесконечно малом объеме.

Контрольные вопросы и упражнения

1. Сформулируйте определение теории конечных деформаций.
2. Сформулируйте определение теории пластического течения.
3. Изобразите схему деформации тела с указанием вектора перемещения.
4. Сформулируйте определение вектора перемещений.
5. При каких условиях возможно совмещение старой и новой систем координат?
6. Объясните подход Лагранжа к определению деформаций.
7. Объясните подход Эйлера к определению деформаций.
8. Запишите покомпонентное представление компонент и их приращений для вектора перемещений.
9. Напишите формулы определения расстояний в старой и новой системах координат в покомпонентном представлении.
10. Выразите квадрат расстояния в новой системе координат через старые координаты и вектор перемещений.
11. Сформулируйте определение компонент тензора деформаций и запишите сам тензор.
12. Покажите, что тензор деформаций симметричен относительно главной диагонали.
13. Сформулируйте определение компонент тензора малых деформаций Коши.
14. Сформулируйте алгоритм определения главных деформаций.

15. Запишите определение первого и второго инвариантов тензора деформаций.
16. Сформулируйте представление тензора деформаций через девиаторную и шаровую составляющие.
17. Покажите, что объекты, введенные в качестве компонент тензора деформаций, действительно являются деформациями для случая простых и логарифмических деформаций.
18. Сформулируйте представление элементарного объема после деформации через его значение до деформации.
19. Запишите условие несжимаемости.
20. Каким соотношением вводится понятие интенсивности деформаций?
21. Сформулируйте развернутое определение второго инварианта от девиатора тензора деформаций.
22. Выполните процедуру отыскания калибрующего коэффициента в формуле интенсивности деформаций.
23. Приведите полную формулу определения интенсивности деформаций через компоненты тензора деформаций.

Лекция 14. Условие совместности деформаций

=====

1. Понятия о малых и больших деформациях; условие совместности деформаций. 2. Смещенный объем. 3. Однородная и неоднородная деформация. 4. Понятие о скорости деформации.

=====

1. Определение деформаций (13.8) включает и смешанные члены, которые вносят вклад в суммарную деформацию, если деформации большие. Малые деформации, согласно (13.11), выражаются через три компоненты перемещений, а поэтому они не могут быть независимыми.

Продифференцируем дважды выражение (13.11) по \mathbf{k} и \mathbf{l} и запишем его четырежды, циклически изменяя индексы и производя суммирование:

$$\begin{aligned}
 & | \quad \varepsilon_{ij,kl} = \frac{1}{2}(u_{i,jkl} + u_{j,ikl}); \\
 - & | \quad \varepsilon_{li,jk} = \frac{1}{2}(u_{l,ijk} + u_{l,ijk}); \\
 + & | \quad \varepsilon_{kl,ij} = \frac{1}{2}(u_{k,lij} + u_{k,lij}); \\
 - & | \quad \varepsilon_{jk,il} = \frac{1}{2}(u_{j,kli} + u_{i,klj}); \\
 & \varepsilon_{ij,kl} - \varepsilon_{li,jk} + \varepsilon_{kl,ij} - \varepsilon_{jk,li} = 0 .
 \end{aligned} \tag{14.1}$$

Последнее уравнение в (14.1) представляет собой результат алгебраического суммирования предшествующих четырех уравнений, причем правая часть оказалась равной нулю. Это уравнение впервые получено в 1860 г. Сен-

Венаном и содержит 81 уравнение. С использованием псевдо-тензора Леви-Чивиты можно произвести его свертку:

$$\varepsilon_{mlj} \cdot (\varepsilon_{ij,kl} - \varepsilon_{jk,il}) = 0. \quad (14.2)$$

Повторное применение свертки приводит к следующему уравнению, полученному в разных формах Бусинеском в 1971 г., Бельтрами в 1889 г., Чезаро в 1906 г. Фактически в векторном виде оно представляет собой следующее условие в терминах теории поля:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} \cdot \vec{u} = 0, \text{ или } \text{rot rot } \vec{u} = 0.$$

Применяя еще раз операцию свертывания к (14.2), получим:

$$\varepsilon_{mlj} \cdot \varepsilon_{nik} \cdot \varepsilon_{ij,kl} = 0. \quad (14.3)$$

Уравнение (14.3) является **уравнением или условием сплошности (неразрывности) в тензорном представлении**. Индексы **m** и **n** могут принимать значения 1, 2, 3, следовательно, из (14.3) можно получить девять уравнений, однако только шесть из них будут независимыми.

Примем $m = 1$, $n = 1$ и перейдем к обычному суммированию, используя правило Эйнштейна:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{1lj} \cdot \varepsilon_{1ik} \cdot \varepsilon_{ij,kl} &= \varepsilon_{11j} \cdot \varepsilon_{1ik} \cdot \varepsilon_{ij,k1} + \varepsilon_{12j} \cdot \varepsilon_{ik} \cdot \varepsilon_{ij,k2} + \varepsilon_{13j} \cdot \varepsilon_{ik} \cdot \varepsilon_{ij,k3} = \\ &= \varepsilon_{1ik} \cdot \varepsilon_{i3,k2} - \varepsilon_{1ik} \varepsilon_{i2,k3} = \varepsilon_{12k} \cdot \varepsilon_{23,k2} + \varepsilon_{13k} \cdot \varepsilon_{33,k2} - \varepsilon_{12k} \cdot \varepsilon_{22,k3} - \varepsilon_{13k} \cdot \varepsilon_{32,k3} = \\ &= 2 \cdot \varepsilon_{23,32} - \varepsilon_{33,22} - \varepsilon_{22,33} = 0. \end{aligned}$$

В координатной форме данное уравнение (последняя строка) имеет вид

$$2 \cdot \frac{\partial^2 \varepsilon_{23}}{dx_2 \cdot dx_3} - \frac{\partial^2 \varepsilon_{33}}{\partial x_2^2} - \frac{\partial^2 \varepsilon_{22}}{\partial x_3^2} = 0. \quad (14.4)$$

Еще два аналогичных уравнения могут быть получены с помощью изложенной выше процедуры при $m = n = 2$ и $m = n = 3$ из (14.3), однако тот же самый результат получается из (14.4) циклической перестановкой индексов:

$$2 \cdot \frac{\partial^2 \varepsilon_{31}}{dx_3 \cdot dx_1} - \frac{\partial^2 \varepsilon_{11}}{\partial x_3^2} - \frac{\partial^2 \varepsilon_{33}}{\partial x_1^2} = 0. \quad (14.5)$$

$$2 \cdot \frac{\partial^2 \varepsilon_{12}}{dx_1 \cdot dx_2} - \frac{\partial^2 \varepsilon_{22}}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2 \varepsilon_{11}}{\partial x_2^2} = 0. \quad (14.6)$$

Если взять разноименные индексы для m и n , например, $m = 1$, $n = 2$, то (14.3) можно развернуть следующим образом:

$$\varepsilon_{1lj} \cdot \varepsilon_{2ik} \cdot \varepsilon_{ij,kl} = 0; \quad \varepsilon_{12j} \cdot \varepsilon_{2ik} \cdot \varepsilon_{ij,k2} + \varepsilon_{13j} \cdot \varepsilon_{2ik} \cdot \varepsilon_{ij,k3} = 0.$$

$$\varepsilon_{2ik} \cdot \varepsilon_{i3,k2} - \varepsilon_{2ik} \cdot \varepsilon_{i2,k3} = 0;$$

$$\varepsilon_{21k} \cdot \varepsilon_{13,k2} + \varepsilon_{23k} \cdot \varepsilon_{33,k2} - \varepsilon_{21k} \cdot \varepsilon_{12,k3} - \varepsilon_{23k} \cdot \varepsilon_{32,k3} = 0.$$

$$- \varepsilon_{13,32} + \varepsilon_{33,12} + \varepsilon_{12,33} - \varepsilon_{32,13} = 0. \quad (14.7)$$

Запишем уравнение (14.7) в координатной форме:

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{33}}{dx_1 \cdot dx_2} + \frac{\partial}{\partial x_3} \left(\frac{\partial \varepsilon_{12}}{\partial x_3} - \frac{\partial \varepsilon_{13}}{\partial x_2} - \frac{\partial \varepsilon_{32}}{\partial x_1} \right) = 0 . \quad (14.8)$$

Уравнения неразрывности для других разноименных индексов можно получить из (14.8) циклической перестановкой индексов.

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{11}}{dx_2 \cdot dx_3} + \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{\partial \varepsilon_{23}}{\partial x_1} - \frac{\partial \varepsilon_{21}}{\partial x_3} - \frac{\partial \varepsilon_{13}}{\partial x_2} \right) = 0 . \quad (14.9)$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{22}}{dx_3 \cdot dx_1} + \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{\partial \varepsilon_{31}}{\partial x_2} - \frac{\partial \varepsilon_{32}}{\partial x_1} - \frac{\partial \varepsilon_{21}}{\partial x_3} \right) = 0 . \quad (14.10)$$

Таким образом, уравнение (14.3) дает **условие совместности деформаций в тензорной форме**, в то время как уравнения (14.4) – (14.6) и (14.8) – (14.10) дают **координатную форму** этого условия. Выполнение данного условия гарантирует отсутствие разрушений в заготовке при деформировании, поскольку нарушение его ведет к тому, что к такому телу существующая модель сплошной среды вообще неприменима. Отметим, что наличие только шести уравнений связи вместо девяти обусловлено симметричностью тензора деформаций относительно главной диагонали матрицы.

2. Пусть деформированию подвергается некоторый кубик с размером ребра x_{30} . Введем понятие **смещенного объема** в одном из направлений, например, **в направлении x_3** согласно рис. 14.1.

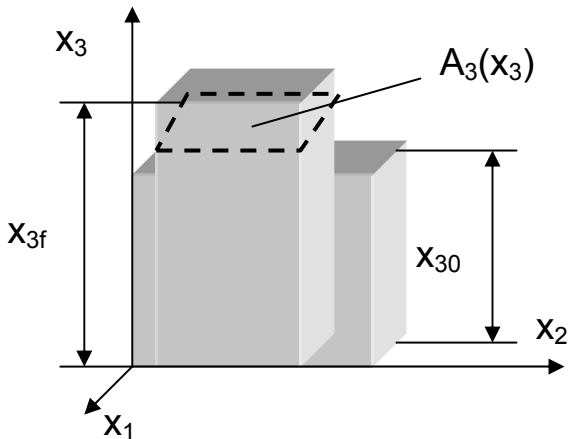


Рис. 14.1. К определению смещенного объема

$$V_{c3} = \int_{x_{30}}^{x_{3f}} A(x_3) \cdot dx_3 . \quad (14.11)$$

При пластическом деформировании объем постоянен, а площадь поперечного сечения определяется соотношением: $A(x_3) = \frac{V}{x_3}$. Тогда формула

(14.11) принимает вид

$$V_{c3} = V \cdot \int_{x_{30}}^{x_{3f}} \frac{dx_3}{x_3} = V \cdot \ln \left(\frac{x_{3f}}{x_{30}} \right) = V \cdot e_3 . \quad (14.12)$$

Таким образом, смещенный объем в заданном направлении равен произведению объема на логарифмическую деформацию в данном направлении.

Очевидно, **полный смещенный объем** равен нулю вследствие условия несжимаемости. Понятие смещенного объема полезно для оценки потребной работы деформирования. Произведение предела текучести на смещенный объем дает порядок этой работы для предварительного выбора оборудования.

3. Как видно из (13.11), компоненты малой деформации являются линейными функциями от производных перемещений по координатам. При рассмотрении бесконечно малой окрестности точки сами перемещения следует считать линейными функциями координат, а следовательно, их производные, выражающие деформации, постоянными. **Однородная деформация** – деформация, при которой перемещения являются линейными функциями координат, а сама деформация постоянной. При однородной деформации выделенные объекты в теле преобразуются в подобные (плоскость – в плоскость, шар – в сферу и т. п.).

При неоднородной деформации деформационная картина усложняется, на некоторых участках деформация может быть немонотонной (меняется знак деформаций). Теория конечных деформаций и теория пластического течения дают практически одни и те же результаты при условии монотонной деформации, когда деформации малы. При немонотонной деформации в теории пластических течений рассматривают некий параметр нагружения, который связывается с накопленной деформацией (параметр Удквиста).

4. При деформировании расстояния между точками изменяются со временем, т. е. $u_i = f(x_1, x_2, x_3, t)$. Наличие зависимости перемещений от времени позволяет ввести понятие скорости деформаций (для одномерного случая такое понятие введено в лекц. 1):

$$\dot{\epsilon}_{ij} = \frac{1}{2} \cdot (\dot{u}_{i,j} + \dot{u}_{j,i}) . \quad (14.13)$$

Для скоростей деформаций выполняется условие несжимаемости (постоянство объема с течением времени); можно определить главные скорости деформации, дать их интерпретацию в терминах кругов Мора и т. д. аналогично деформациям. Скорости деформаций играют существенную роль в теории пластического течения.

Контрольные вопросы и упражнения

1. Почему малые деформации не могут быть независимыми друг от друга?
2. Как можно получить уравнение совместности деформаций без свертки (уравнение Сен – Венана); покажите, что правая часть, содержащая суммы производных от перемещений, действительно равна нулю.
3. Произведите двойную свертку уравнения Сен – Венана и для каждого перехода.
4. Какие значения должны принимать первые индексы в тензорах Леви – Чивиты, чтобы получить однородные уравнения сплошности?

5. Выполните переход к координатной форме представления для одноименных значений индексов m и n .
6. Выполните переход к координатной форме представления для разноименных значений индексов m и n .
7. Почему из девяти уравнений неразрывности только шесть являются независимыми?
8. Изобразите схему определения смещенного объема.
9. Дайте математическую формулировку смещенного объема в заданном направлении.
10. Покажите, что смещенный объем в заданном направлении равен произведению объема на логарифмическую деформацию.
11. В каком случае смещенный объем равняется произведению объема на обычную деформацию?
12. Чему равен полный смещенный объем и почему?
13. Где можно использовать понятие смещенного объема в заданном направлении?
14. Дайте определение однородной и неоднородной деформации.
15. Что такое немонотонная деформация?
16. Как учитывают немонотонность деформации в теории пластических течений?
17. Дайте определение компонент тензора скорости деформаций.
18. Запишите тензор скорости деформаций в матричной форме.
19. Какими сходными с деформациями свойствами обладают скорости деформаций?
20. Какую размерность имеют скорости деформаций?
21. Можно ли идентифицировать скорость деформации заготовки и скорость движения инструмента?
22. В каком случае скорость перемещения материала заготовки и скорость перемещения инструмента могут быть отождествлены?
23. В каком подходе скорости деформаций играют существенную роль?
24. Выпишите скорости деформаций для плоской задачи в координатном виде (выбор оси, вдоль которой деформация отсутствует, остается за студентом).
25. Приведите примеры процессов ОМД, где скорости деформаций существенно неравномерны.

Раздел 5. УСЛОВИЕ ПЛАСТИЧНОСТИ

Лекция 15. Модели пластического формоизменения и условия пластичности

=====

1. Модели сплошных сред. 2. Условие пластичности Мизеса – Губера – Генке. 3. Энергетическое условие пластичности. 4. Частные случаи условия пластичности. 5. Упрощенное условие пластичности. Фактор Лоде.

=====

1. Модели сплошных сред весьма разнообразны: упругая, упруго пластическая, жестко пластическая, вязко пластическая и т. д.

В зависимости от допущений в теории пластичности различают следующие наиболее часто используемые модели (рис. 15.1):

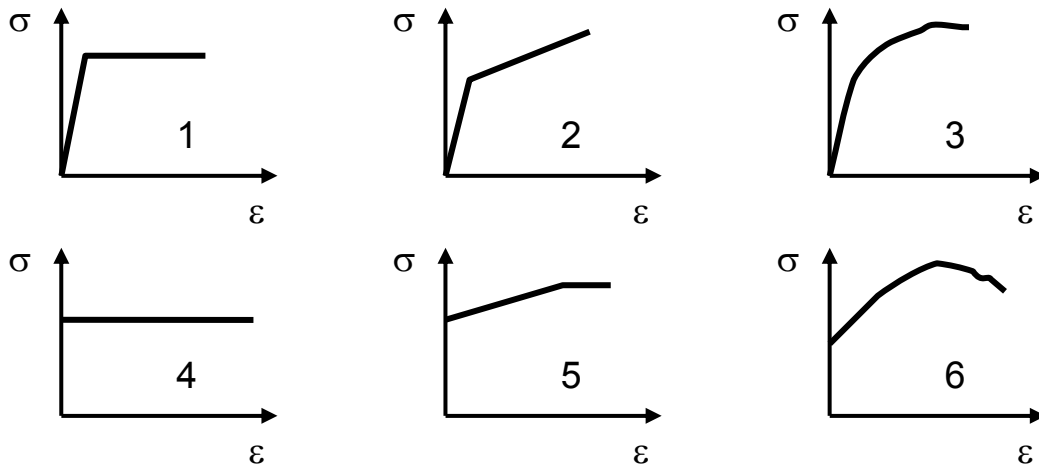


Рис. 15.1. Модели сплошных деформируемых сред

1. Идеально пластичного тела («1»);
2. Идеально пластичного тела с линейным законом упрочнения («2»);
3. Идеально пластичного тела со степенным законом упрочнения («3»);
4. Жестко пластичного тела («4»);
5. Жестко пластичного тела с линейным законом упрочнения («5»);
6. Жестко пластичного тела со степенным законом упрочнения («6»).

2. Условия пластичности формируются для начального этапа развития пластических деформаций, причем в чисто пластической задаче упругие составляющие не учитываются. Экспериментально установлено, что пластическое формоизменение имеет место, когда второй инвариант от девиатора напряжений достигает определенного значения, определяемого пределом текучести материала. В лекции 9 формулы (9.12) и (9.13) определяют понятие интенсивности напряжений и зависимость второго инварианта от напряжений. Выражение

интенсивности напряжений (эквивалентного напряжения σ_i) через компоненты тензора напряжений дается формулой (9.14).

Независимо друг от друга Мизес, Губер и Генке для случая идеально пластического тела выдвинули гипотезу, согласно которой для достижения пластического состояния в точке необходимо, чтобы выполнялось условие:

$$\sigma_i = \sigma_s, \quad (15.1)$$

где σ_s – предел текучести материала.

Учет упрочнения осуществляется обычно в виде линейной или степенной зависимости (см. Л. 4), однако это существенно затрудняет решение задач.

Экспериментально Бриджменом и Надаи была подтверждена справедливость условия (15.1), так что из (9.14) и (15.1) получаем **условие пластичности Мизеса – Губера(– Генке)** в следующем виде:

$$(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + (\sigma_{11} - \sigma_{33})^2 + (\sigma_{22} - \sigma_{33})^2 + 6(\sigma_{12}^2 + \sigma_{13}^2 + \sigma_{23}^2) = 2\sigma_s^2. \quad (15.2)$$

Условие (15.2) не единственно. Например, **условие пластичности Сен-Венана** гласит: пластичность наступает, когда разность между наибольшим и наименьшим напряжением достигает предела текучести. Экспериментально показано, что условие (15.2) является более точным.

3. Существует также энергетическое условие пластичности. Запишем полную работу пластического формоизменения:

$$A_n = A_0 + A_{TM}, \quad (15.3)$$

где A_0 – работа, затраченная на всестороннее сжатие;

A_{TM} – работа, затраченная на изменение формы.

Работа, приходящаяся на единичный объем, как известно из сопротивления материалов, определяется произведением тензоров напряжений и деформаций в терминах их собственных значений:

$$A_n = \frac{1}{2} T_\sigma \cdot T_\varepsilon; \quad A_0 = \frac{1}{2} \bar{T}_\sigma \cdot \bar{T}_\varepsilon. \quad (15.4)$$

Запишем тензоры в виде матриц, а также закон Гука, учитывая, что во всех соотношениях следует сделать переход к главным значениям напряжений и деформаций:

$$T_\sigma = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{33} \end{pmatrix}; \quad T_\varepsilon = \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{33} \end{pmatrix}; \quad \varepsilon_1 = \frac{1}{E} [\sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3)];$$

$$\bar{T}_\sigma = \begin{pmatrix} \sigma_{cp} & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{cp} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{cp} \end{pmatrix}; \quad \bar{T}_\varepsilon = \begin{pmatrix} \varepsilon_{cp} & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_{cp} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{cp} \end{pmatrix}; \quad \varepsilon_2 = \frac{1}{E} [\sigma_2 - \mu(\sigma_1 + \sigma_3)];$$

$$\varepsilon_3 = \frac{1}{E} [\sigma_3 - \mu(\sigma_1 + \sigma_2)].$$

Подставляя (15.4) в (15.3) и проводя преобразования с учетом последних соотношений и условия пластичности (15.2), получим:

$$\begin{aligned} A_{\text{TM}} = A_n - A_0 &= \frac{1}{2}(\varepsilon_1 \cdot \sigma_1 + \varepsilon_2 \cdot \sigma_2 + \varepsilon_3 \cdot \sigma_3) - A_0 = \\ &= \frac{1+\mu}{6E} \left[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 \right] = \frac{1+\mu}{6E} 2\sigma_s^2 = \frac{1+\mu}{3E} \sigma_s^2. \end{aligned} \quad (15.5)$$

Формула (15.5) представляет собой формулировку **энергетического условия пластичности**: удельная работа формоизменения не зависит от пластического состояния, а зависит от констант материала.

4. Рассмотрим частные случаи условия пластичности (15.2):

1. Плоское напряженное состояние:

$$\sigma_{22} = \sigma_{21} = \sigma_{32} = 0. \quad (15.6)$$

Перепишем условие Мизеса – Губера с учетом (15.8):

$$\sigma_{11}^2 + (\sigma_{11} - \sigma_{33})^2 + \sigma_{33}^2 + 6\sigma_{13}^2 = 2\sigma_s^2; \quad \sigma_{11}^2 + \sigma_{33}^2 - \sigma_{11} \cdot \sigma_{33} + 3\sigma_{13}^2 = \sigma_s^2. \quad (15.7)$$

В главных напряжениях формула (15.9) имеет вид:

$$\sigma_1^2 + \sigma_3^2 - \sigma_1 \cdot \sigma_3 = \sigma_s^2. \quad (15.8)$$

2. Плоское деформированное состояние:

Пусть одна из деформаций, например, $\varepsilon_2 = 0$. Вследствие закона Гука все деформации (а, следовательно, и напряжения), имеющие индекс «2», равны нулю, а также справедливо соотношение:

$$\varepsilon_2 = \frac{1}{E} [\sigma_2 - \mu(\sigma_1 + \sigma_3)] = 0. \quad (15.9)$$

Так как для пластического состояния $\mu = \frac{1}{2}$, из (15.9) имеем:

$$\sigma_2 = \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2}, \text{ или } \sigma_{22} = \frac{\sigma_{11} + \sigma_{33}}{2}. \quad (15.10)$$

Подставляя значения оставшихся напряжений в условие (15.2), получим:

$$(\sigma_{11} - \sigma_{33})^2 + 4\sigma_{13}^2 = \frac{4}{3}\sigma_s^2. \quad (15.11)$$

Введем обозначение $\frac{4}{3}\sigma_s^2 = (\sigma_s^*)^2$, или $\sigma_s^* = \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \sigma_s$ – модифицированный предел текучести. В этих обозначениях условие пластичности для плоского деформированного состояния принимает вид

$$(\sigma_{11} - \sigma_{33})^2 + 4\sigma_{13}^2 = \sigma_s^{*2}. \quad (15.12)$$

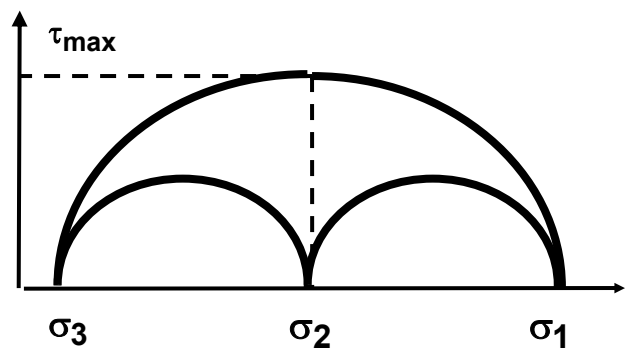
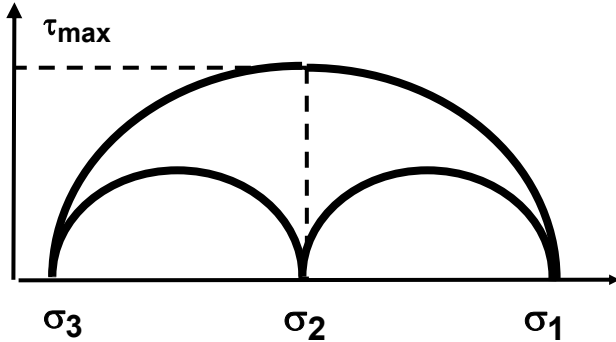


Рис. 15.2. К условию пластичности Сен – Венана – Треска

Перейдем к главным напряжениям в (15.12):

$$(\sigma_1 - \sigma_3) = \pm \sigma_s^* \quad (15.13)$$

На рис. 15.2 представлены круги Мора для случая плоской деформации, откуда видно, что максимальное касательное напряжение равно полуразности главных напряжений:



$$\tau_{\max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}, \text{ или } \tau_{\max} = \pm \frac{\sigma_s^*}{2}.$$

Но именно в таком виде (только с обычным пределом текучести) было сформулировано условие пластичности Сен – Венана – Треска, которое, правда, не вполне обоснованно обобщалось и на другие виды НДС.

Рис. 15.2. К условию пластичности Сен-Венана – Треска

5. Для получения упрощенного условия пластичности перепишем (15.2) в главных напряжениях:

$$(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 = 2\sigma_s^2. \quad (15.14)$$

Рассмотрим частные случаи:

1. $\sigma_2 = \sigma_1$; $(\sigma_1 - \sigma_3)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2 = 2\sigma_s^2$; $\sigma_1 - \sigma_3 = \pm \sigma_s$.
2. $\sigma_2 = \sigma_3$; $(\sigma_1 - \sigma_3)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2 = 2\sigma_s^2$; $\sigma_1 - \sigma_3 = \pm \sigma_s$.
3. $\sigma_2 = \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2}$; $\left(\sigma_1 - \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2}\right)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2 + \left(\frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2} - \sigma_3\right)^2 = 2\sigma_s^2$.
 $\frac{3}{2}(\sigma_1 - \sigma_3)^2 = 2\sigma_s^2$; $\sigma_1 - \sigma_3 = \pm \frac{2}{\sqrt{3}}\sigma_s$.

Если рассмотреть диаграмму Мора (рис. 10.5), то можно увидеть, что среднее напряжение в первых двух рассмотренных выше случаях принимает предельные значения, а третьем – среднее, причем в правой части частных условий пластичности можно произвести обобщение на случай произвольного значения промежуточного напряжения:

$$\sigma_1 - \sigma_3 = \pm \beta \sigma_s; \quad 1 \leq \beta \leq \frac{2}{\sqrt{3}}, \quad (15.15)$$

где β – коэффициент, подлежащий определению.

Для определения β введем предварительно показатель напряженного состояния (**фактор Лоде**) в соответствии с рис. 10.3 и 10.5:

$$v_\sigma = \frac{EC}{AD/2} = \frac{\sigma_2 - (\sigma_1 + \sigma_3)/2}{(\sigma_1 - \sigma_3)/2} = \frac{2\sigma_2 - \sigma_1 - \sigma_3}{\sigma_1 - \sigma_3}. \quad (15.16)$$

Для рассмотренных выше случаев:

$$1. \quad \sigma_2 = \sigma_1; \quad \nu_\sigma = \frac{2\sigma_1 - \sigma_1 - \sigma_3}{\sigma_1 - \sigma_3} = 1.$$

$$2. \quad \sigma_2 = \sigma_3; \quad \nu_\sigma = \frac{2\sigma_3 - \sigma_1 - \sigma_3}{\sigma_1 - \sigma_3} = \frac{\sigma_3 - \sigma_1}{\sigma_1 - \sigma_3} = -1.$$

$$3. \quad \sigma_2 = \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2}; \quad \nu_\sigma = \frac{\sigma_1 + \sigma_3 - \sigma_1 - \sigma_3}{\sigma_1 - \sigma_3} = 0.$$

Следовательно, $-1 \leq \nu_\sigma \leq 1$.

Из (15.16) выразим $\sigma_2 = \frac{\nu_\sigma(\sigma_1 - \sigma_3)}{2} + \frac{(\sigma_1 + \sigma_3)}{2}$ и подставим его в условие пластичности (15.14). После преобразований получаем:

$$\sigma_1 - \sigma_3 = \pm \frac{2}{\sqrt{3 + \nu_\sigma^2}} \sigma_s. \quad (15.17)$$

Сравнивая (15.15) и (15.17), можно установить, что

$$\beta = \frac{2}{\sqrt{3 + \nu_\sigma^2}}. \quad (15.18)$$

Коэффициент β используется в упрощенном условии пластичности, которое в отличие от условия Губера – Мизеса является линейным, что существенно облегчает решение задач пластического формоизменения.

Контрольные вопросы и упражнения

1. Изобразите и назовите шесть наиболее применяемых моделей деформируемого твердого тела.
2. Каковы экспериментальные предпосылки для формулировки условия пластичности?
3. Запишите посылку Губера – Мизеса для идеально пластичного тела.
4. Какие аналитические функции наиболее часто применяются для описания упрочнения; к каким проблемам это приводит при аналитическом решении задач?
5. Дайте вывод условия пластичности Мизеса – Губера.
6. Как условие пластичности было сформулировано Сен – Венаном?
7. Какое из известных условий пластичности является более точным?
8. Дайте формулу баланса работ без учета потерь.
9. Приведите формулы вычисления полной удельной работы деформирования через тензоры.
10. Как определяют удельную работу, идущую на всестороннее сжатие или растяжение?
11. Запишите тензоры напряжений и деформаций в терминах главных величин.

12. Вычислите удельную работу формообразования для формулировки энергетического условия пластичности.
13. Сделайте вывод условия пластичности для плоского напряженного состояния.
14. Выведите условие пластичности для плоского деформированного состояния.
15. Из какого условия можно получить значение коэффициента Пуассона для пластической области?
16. К какому соотношению приводит условие пластичности для плоской деформации с учетом введения модифицированного предела текучести?
17. Изобразите главные напряжения на диаграмме Мора и покажите максимальное значение касательного напряжения; как соотносятся данные диаграммы с условием Треска?
18. К какой форме условия пластичности приводит рассмотрение случаев равенства двух главных напряжений (выполнить выкладки)?
19. Какой вид принимает условие пластичности, если одно из напряжений равно полусумме двух других?
20. В каком виде можно представить упрощенное условие пластичности и в каких пределах изменяется вводимый коэффициент β ?
21. Дайте геометрическую интерпретация фактора Лоде и приведите аналитическую зависимость.
22. Какие предельные значения принимает фактор Лоде?
23. При каком соотношении трех главных напряжений фактор Лоде равен нулю?
24. Сделайте вывод коэффициента β в упрощенном условии пластичности, выразив его через фактор Лоде и предел текучести.
25. Каковы преимущества и недостатки упрощенного условия пластичности?

Раздел 6. СВЯЗЬ МЕЖДУ НАПРЯЖЕНИЯМИ, ДЕФОРМАЦИЯМИ И СКОРОСТЯМИ ДЕФОРМАЦИЙ

Лекция 16. Физические уравнения теории пластичности

=====

1. Понятия о простом и сложном нагружении. 2. Подобие кругов Мора для напряжений и деформаций; их взаимосвязь. 3. Связь между напряжениями и скоростями деформаций в теории пластического течения.

=====

1. При пластическом формоизменении внешние силы могут различным образом изменяться по отношению ко времени или какому-либо другому параметру (**параметр Удквиста**). В зависимости от характера изменения внешних сил различают простое и сложное нагружение. Согласно А. А. Ильюшину, процесс нагружения является **простым**, если внешние силы от начала их приложе-

ния возрастают пропорционально общему параметру. Такое разделение процессов имеет существенное значение: в теории конечных деформаций физические уравнения могут быть представлены в достаточно простой форме; в теории пластического течения накопленная деформация определяется интегрированием интенсивности деформаций по параметру Удквиста.

2. Прямые соотношения. Для установления физических уравнений для случая простого нагружения примем ряд допущений:

1. Будем считать нагружение простым (деформации и напряжения монотонно увеличиваются или монотонно уменьшаются), при этом направления главных деформаций совпадают с направлениями главных напряжений.

2. Показатели напряженного и деформированного состояния ν_σ ν_ε совпадают (подобие кругов Мора).

3. Материал считается несжимаемым.

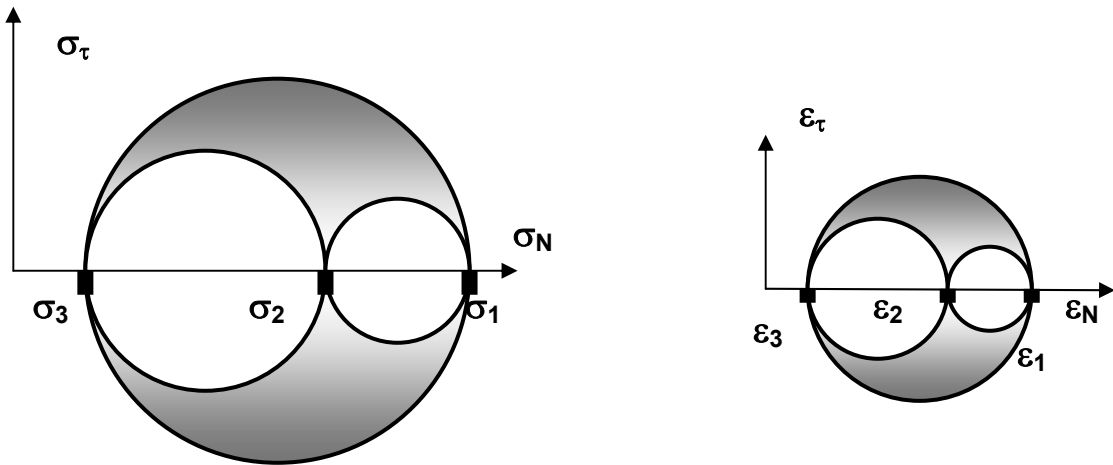


Рис. 16.1. Подобие диаграмм Мора для напряжений и деформаций

4. Деформации считаются малыми.

5. Справедлива гипотеза «единой кривой».

Первое допущение позволяет рассматривать возможность пропорционального изменения напряжений и деформаций. Из допущения о подобии кругов Мора (рис. 16.1) следует:

$$\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{\varepsilon_1 - \varepsilon_2} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{\varepsilon_1 - \varepsilon_3} = \frac{\sigma_2 - \sigma_3}{\varepsilon_2 - \varepsilon_3} = 2G', \quad (16.1)$$

где $2G'$ – некий параметр пропорциональности.

Из условия несжимаемости (третье допущение: $\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 = 0$) выразим ε_3 и подставим его в одно из соотношений (16.1):

$$\sigma_2 - \sigma_3 = 2G' \cdot (\varepsilon_2 - \varepsilon_3) = 2G' \cdot (\varepsilon_1 + 2 \cdot \varepsilon_2). \quad (16.2)$$

Возьмем из (16.1) еще одно соотношение:

$$\sigma_1 - \sigma_2 = 2G' \cdot (\varepsilon_1 - \varepsilon_2). \quad (16.3)$$

Умножим (16.3) на 2 и сложим с (16.2):

$$2\sigma_1 - \sigma_2 - \sigma_3 = 2G' \cdot 3\varepsilon_1; \quad \sigma_1 - \frac{(\sigma_2 + \sigma_3)}{2} = G' \cdot 3\varepsilon_1,$$

откуда

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{3G'} \left[\sigma_1 - \frac{1}{2} \cdot (\sigma_2 + \sigma_3) \right] = \frac{1}{E'} \left[\sigma_1 - \frac{1}{2} \cdot (\sigma_2 + \sigma_3) \right]. \quad (16.4)$$

В последнем уравнении величина $3G' = E'$ называется **модулем пластичности первого рода**, а величина G' – **модулем пластичности второго рода**. Связь ε_2 и ε_3 с напряжениями можно получить путем комбинирования формулы (16.1) с условием пластичности или же путем циклической перестановки индексов в формуле (16.4). Добавляя по аналогии с законом Гука соотношения для деформаций сдвига, имеем:

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{E'} \left[\sigma_1 - \frac{1}{2} \cdot (\sigma_2 + \sigma_3) \right]; \quad \varepsilon_2 = \frac{1}{E'} \left[\sigma_2 - \frac{1}{2} \cdot (\sigma_1 + \sigma_3) \right]; \quad \varepsilon_3 = \frac{1}{E'} \left[\sigma_3 - \frac{1}{2} \cdot (\sigma_1 + \sigma_2) \right];$$

$$\varepsilon_{ij} = \frac{\sigma_{ij}}{G}, \quad i \neq j. \quad (16.5)$$

Соотношения (16.5) являются **физическими уравнениями** теории пластичности. Они аналогичны закону Гука для упругой области:

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{E} \left[\sigma_1 - \mu \cdot (\sigma_2 + \sigma_3) \right]; \quad \dots; \quad \varepsilon_{ij} = \frac{\sigma_{ij}}{G}, \quad i \neq j, \quad \text{где } G = \frac{E}{2 \cdot (1 + \mu)}. \quad (16.6)$$

Анализ соотношений (16.5):

1. $\sigma_1 = \sigma_2 \Rightarrow \varepsilon_1 = \varepsilon_2$.
2. $\sigma_2 = \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2} \Rightarrow \varepsilon_2 = 0$. (Плоское деформированное состояние).
3. $\sigma_2 = 0 \Rightarrow \varepsilon_2 = -\frac{1}{E'} \left(\frac{\sigma_3 + \sigma_1}{2} \right) \propto \sigma_{ср}$.

При переходе из упругой в пластическую область физические уравнения должны подвергаться изменениям в части значений коэффициентов, а именно, $E \rightarrow E'$ и $\mu = \frac{1}{2}$. Из последнего соотношения в (16.6) следует:

$$G = \frac{E}{2 \cdot (1 + \mu)} \rightarrow G' = \frac{E'}{2 \cdot \left(1 + \frac{1}{2}\right)} = \frac{E'}{3}; \quad E' = 3G'. \quad (16.7)$$

Обратные соотношения. Для вывода обратных соотношений (выражение напряжений через деформации) используем пятое допущение. Гипотеза «единой кривой»: при произвольном напряженном деформированном состоянии зависимость между интенсивностью напряжений и интенсивностью деформаций можно моделировать диаграммой одноосного растяжения (рис. 16.2).

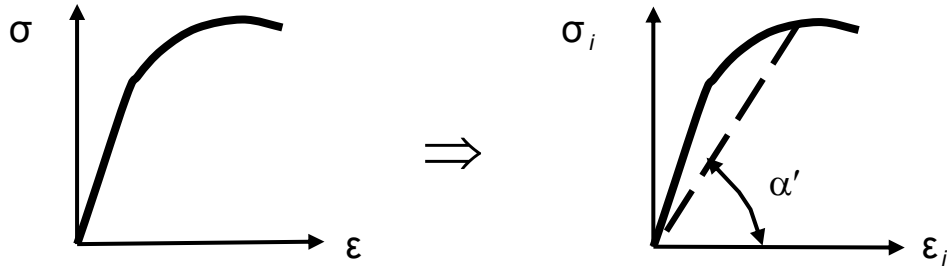


Рис. 16.2. К иллюстрации гипотезы «единой кривой»

Сделаем тождественные преобразования первого из уравнений (16.5):

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{E'} \left[\sigma_1 - \frac{1}{2} \cdot (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) + \frac{\sigma_1}{2} \right] = \frac{1}{E'} \cdot \frac{3}{2} [\sigma_1 - \sigma_{\text{ср}}] .$$

Аналогично из других уравнений получим соотношения:

$$\sigma_1 - \sigma_{\text{ср}} = \frac{2}{3} \cdot E' \cdot \varepsilon_1 ; \quad \sigma_2 - \sigma_{\text{ср}} = \frac{2}{3} \cdot E' \cdot \varepsilon_2 ; \quad \sigma_3 - \sigma_{\text{ср}} = \frac{2}{3} \cdot E' \cdot \varepsilon_3 . \quad (16.8)$$

На основании гипотезы «единой кривой» рис. 16.2 имеем:

$$E' = \operatorname{tg} \alpha' = \operatorname{tg} \frac{\sigma_i}{\varepsilon_i} \approx \frac{\sigma_i}{\varepsilon_i} . \quad (16.9)$$

Из (16.8) и (16.9) получаем:

$$\sigma_1 = \frac{2 \cdot \sigma_i}{3 \cdot \varepsilon_i} \cdot \varepsilon_1 + \sigma_{\text{ср}} ; \quad \sigma_2 = \frac{2 \cdot \sigma_i}{3 \cdot \varepsilon_i} \cdot \varepsilon_2 + \sigma_{\text{ср}} ; \quad \sigma_3 = \frac{2 \cdot \sigma_i}{3 \cdot \varepsilon_i} \cdot \varepsilon_3 + \sigma_{\text{ср}} . \quad (16.10)$$

Физические уравнения (16.5) и (16.10) установлены для малых деформаций в теории конечных деформаций.

3. В теории пластического течения (для больших деформаций), как установлено экспериментами, в качестве физических уравнений необходимо брать связь между напряжениями и скоростями деформации. Все соотношения (16.1) – (16.10) при условии замены деформаций их скоростями будут справедливы.

Контрольные вопросы и упражнения

1. Дайте определение простого нагружения.
2. Что такое параметр Удквиста и где он используется?
3. Сформулируйте допущения для установления физических уравнений теории пластичности.
4. Изобразите подобие кругов Мора для напряжений и деформаций.
5. Какие соотношения следуют из этого подобия кругов Мора?
6. Сделайте вывод зависимости каждой из главных деформаций от напряжений.
7. Дайте определение модулей пластичности первого и второго рода.
8. Дайте геометрическую иллюстрацию модуля пластичности первого рода.

9. Запишите обобщенный закон Гука.
10. Какой предельный переход следует в нем сделать для получения физических уравнений теории пластичности?
11. Будут ли равны деформации, если одноименные им напряжения равны? Докажите свой ответ.
12. Какие зависимости характерны для напряжений и деформаций в случае плоского деформированного и плоского напряженного состояний?
13. Сформулируйте гипотезу «единой кривой».
14. Сделайте вывод обратных соотношений связи деформаций и напряжений.
15. Какой вид имеют физические уравнения в теории пластического течения?
16. Покажите, что если физические уравнения в пластической области имеют вид, аналогичный закону Гука, то показатели напряженного и деформированного состояния (факторы Лоде) равны.

Раздел 7. КОНТАКТНОЕ ТРЕНИЕ

Лекция 17. Контактное трение

- =====
1. Особенности контактного трения при пластическом формоизменении.
 2. Физические основы и условия на поверхности контакта.
 3. Основные факторы, влияющие на контактное трение.
 4. Учет контактного трения в процессах ОМД.
- =====

1. В процессах ОМД в зоне «инструмент – заготовка» возникают силы контактного трения, которые с точки зрения технологии могут быть **положительными** (например, захват и перемещение полосы при прокатке или профилировании, удержание фланца при вытяжке – отбортовке и т. д.) или **отрицательными** (например, при прессовании, большинстве операцийковки и листовой штамповки).

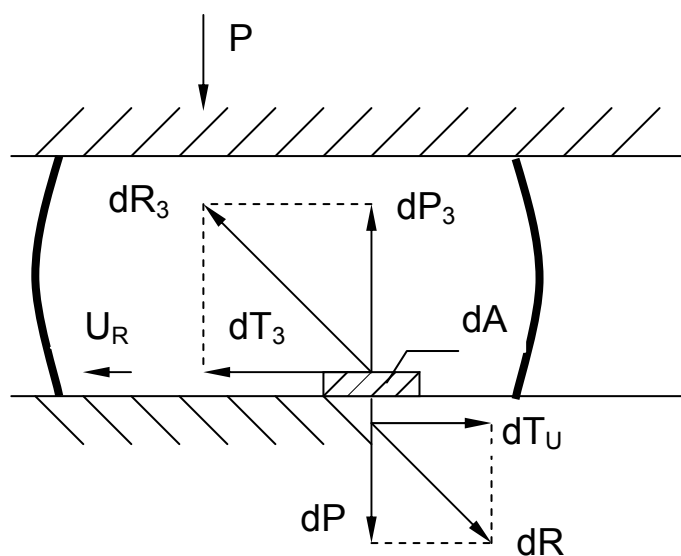


Рис.17.1. Схема действия силовых факторов на контактной площадке

отрицательными (например, при прессовании, большинстве операцийковки и листовой штамповки).

Контактное трение – механическое взаимодействие между твердыми телами в зоне их контакта, препятствующее перемещению их в плоскости соприкосновения.

Трение оказывает существенное **влияние** на силовой режим деформирования, характер формоизменения, износ инструмента и качество изготавливаемых деталей. Например, осадка кольцевой заготовки на шероховатых бойках приводит к уменьшению диаметра отверстия, а осадка на гладких смазанных бойках – к его увеличению. На рис. 17.1 приведена схема осадки осесимметричной заготовки, на которой указаны действующие на элементарную площадку dA силовые факторы. Силу трения dT_z , приложенную к заготовке, называют силой трения сопротивления, а силу dT_U – силой трения активного действия. Первая препятствует движению материала в радиальном направлении, а вторая стремится увлечь инструмент в направлении движения материала заготовки и обуславливает износ инструмента.

Контактным касательным напряжением τ_k называют величину

$$\tau_k = \lim_{dA \rightarrow 0} \frac{dT}{dA} . \quad (17.1)$$

Основным отличием контактного трения при ОМД от трения в кинематических парах является то, что одно из тел деформируется упруго, а второе пластически. При этом происходит непрерывное «обновление» поверхности контакта, приработка отсутствует. При обработке с нагревом на условия формоизменения заготовки влияет температура, деформационное упрочнение.

Вредное влияние контактного трения проявляется в следующем:

- 1) Создание зон затрудненной деформации.
- 2) Неоднородность металла (различная степень упрочнения, различный размер зерна по объему).
- 3) Увеличение деформирующих сил.
- 4) Снижение стойкости инструмента (износ рабочей поверхности, нагрев).
- 5) Необходимость применения смазок.

2. Особенности контактного взаимодействия при ОМД позволяют рассматривать три вида контактного трения: сухое, гидродинамическое, граничное.

Сухое трение предусматривает непосредственный контакт инструмента и заготовки первоначально по микронеровностям преимущественно заготовки (рис.17.2).

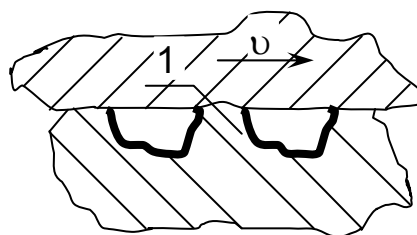


Рис.17.2. Взаимодействие тел при сухом трении

Характеристика сухого трения:

- 1) Возможность появления узлов схватывания при сродстве материалов.
- 2) Разрушение заготовки по телу микронеровности (увеличение площади контакта и появление градиента упрочнения по высоте микронеровности (рис.17.3) при $\tau_k A \geq A_1 \tau_{cp}$.
- 3) Явление схватывания может происходить при комнатных и повышенных температурах, в условиях больших скоростей относительного движения и при статическом контакте. В чистом виде сухое трение встречается редко, т. к.

имеются окислы, загрязнения на поверхности заготовок (реальные условия сухого трения могут иметь место лишь в вакууме).

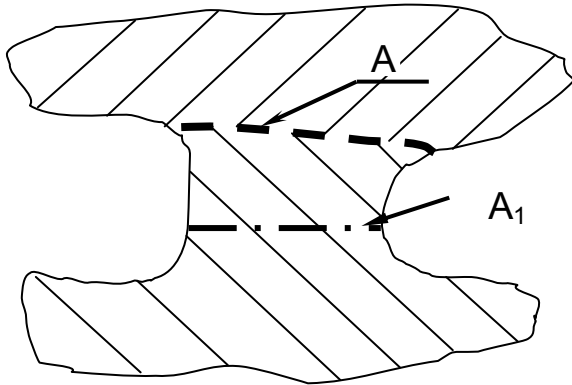


Рис.17.3. Явление схватывания

смазки превышает 10^{-4} мкм. Контактное касательное напряжение определяется в этом случае по формуле Ньютона:

$$\tau_k = \mu_c \frac{dv}{dn}, \quad (17.2)$$

где μ_c – динамическая вязкость смазки; $\frac{dv}{dn}$ – градиент скорости в слое смазки в направлении к контактной поверхности.

Характеристика жидкостного трения:

1) Снижение контактного касательного напряжения примерно на два порядка (применение напорных трубок при волочении прутков и проволоки повышает стойкость инструмента в десятки раз при резком уменьшении брака).

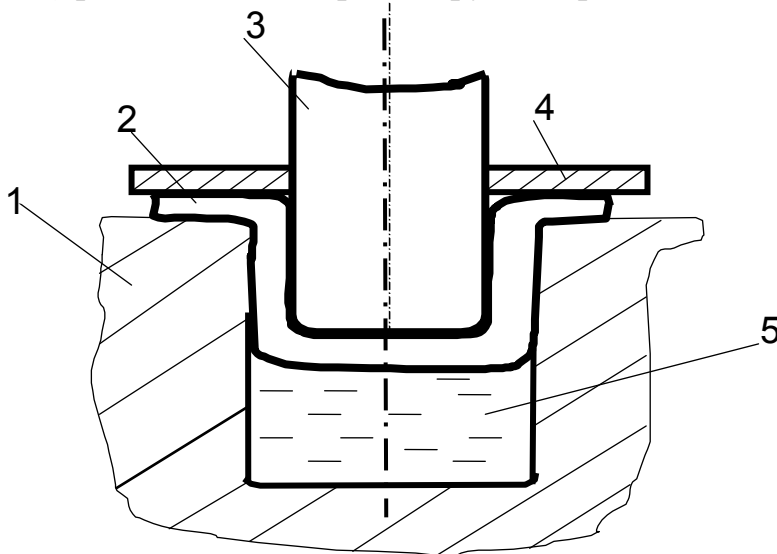


Рис.17.4. Схема реализации жидкостного трения при вытяжке:

1 – матрица; 2 – заготовка; 3 – пуансон;
4 – прижим; 5 – смазка

4) Для предотвращения схватывания поверхность инструмента должна быть высокой чистоты обработки (полирование, хонингование) при низкой степени сродства материалов инструмента и заготовки (различие материалов или твердости их поверхностей).

Гидродинамическое (жидкостное) трение возникает при холодной деформации со смазкой (волочение прутков и проволоки, вытяжка, прессование, осадка), когда толщина слоя

2) Из микронеровностей смазка выдавливается по принципу клина, а при высоких давлениях вязкость смазки резко увеличивается (легкие минеральные масла отверждаются при давлениях 210 МПа при увеличении коэффициента вязкости примерно на порядок; другие смазки переходят в твердое состояние при давлениях

1500...3000 МПа (схема реализации жидкостного трения при вытяжке дана на рисунке 17.3).

3) Большие давления и высокие скорости относительного скольжения повышают температуру, что уменьшает вязкость смазки и толщину ее слоя, и гидродинамическое трение переходит в граничное.

Граничное трение чаще всего встречается при ОМД и характеризуется наличием между заготовкой и инструментом слоя смазки толщиной 10^{-6} — 10^{-4} мкм. Контактное касательное напряжение на порядок больше, чем при жидкостном трении. Это связано с особенностями тонких пленок ($<10^{-4}$ мкм – граничный слой) и наличием микронеровностей, на которых пленка прорывается, и при большом числе таких мест трение может перейти в сухое (наличие узлов схватывания).

Граничные условия на поверхности контакта обычно востребованы при теоретическом анализе процессов ОМД и иногда задаются законом Амонтона – Кулона:

$$\tau_k = f \cdot \sigma_n, \quad (17.3)$$

где f – коэффициент трения скольжения; σ_n – нормальное давление.

Однако при больших давлениях зависимость (17.3) дает завышенные результаты (по данным С. И. Губкина при осадке тонкой цилиндрической заготовки расчетное усилие в 22,6 раза превышало экспериментальное). Противоречие состоит в том, что τ_k по формуле (17.3) может превышать величину максимального касательного напряжения для данного материала k , устанавливаемого в теории пластичности. На практике используют формулу Зибеля для касательного напряжения:

$$\tau_k = f \cdot \sigma_s, \quad (17.4)$$

где σ_s – предел текучести материала заготовки. В этой связи применение формулы (17.3) возможно лишь при отслеживании того, чтобы выполнялось условие $f\sigma_n \leq k$. В противном случае следует применять формулу (17.4). Разумеется, формула (17.3) предпочтительнее, поскольку позволяет учесть распределение касательных напряжений по поверхности контакта. Для простейших случаев зависимость контактных касательных напряжений от геометрии заготовок установлена в работах И. Я. Тарновского.

3. Основные факторы, влияющие на контактное трение, могут быть представлены в такой последовательности:

1) Сродство материала заготовки и инструмента оценивают по параметрам кристаллической решетки. Известен случай, когда замена матриц из стали на матрицы из твердого сплава ВК15 позволила в 1500 раз повысить стойкость инструмента для обжима стальных труб. Хорошие результаты дает также хромирование рабочих поверхностей матриц.

2) Смазка, подобранная надлежащим образом, позволяет приблизить условия трения к гидродинамическому трению. При ухудшении условий смазки

возрастание контактного трения в 3 – 4 раза может привести к увеличению износа в 100 – 1000 раз.

3) Шероховатость поверхности инструмента должна быть оптимальной с точки зрения удержания смазки и обеспечения гидродинамического режима. Чистота обработки и ее направление имеют существенное значение (известно, что после двойного чистового шлифования сопротивление вдоль рисок на 20% меньше в перпендикулярном направлении, чем поперек – так называемое анизотропное трение). При необходимости создания анизотропного трения применяют специальные методы обработки инструмента.

4) Температура деформации может приводить к появлению окисных пленок, увеличивающих трение. Однако нагрев уменьшает сопротивление деформированию, а следовательно, и контактное трение. Преобладание того или иного явления зависит от режимов обработки и других условий процесса. При холодной обработке трение минимально.

5) Характер нагрузки (квазистатическая, вибрационная и др.) влияет на процесс формообразования. Например, применение вибрации при осадке снижает деформирующее усилие в 1,5 – 2 раза, что объясняется также снижением сил трения.

6) Скорость скольжения при ее увеличении коррелируется со снижением трения. Известно, что трение при обработке на молоте меньше, чем при обработке на прессе.

4. Учет контактного трения при разработке технологии ОМД ведет к снижению технологического усилия, уменьшению неравномерности деформации, предотвращению интенсивного износа инструмента, повышению качества изделий. Например, при холодном выдавливании обратное движение матрицы со скоростью, превышающей скорость истечения металла, позволяет снизить усилие деформирования на 20 – 30% (рис.17.5).

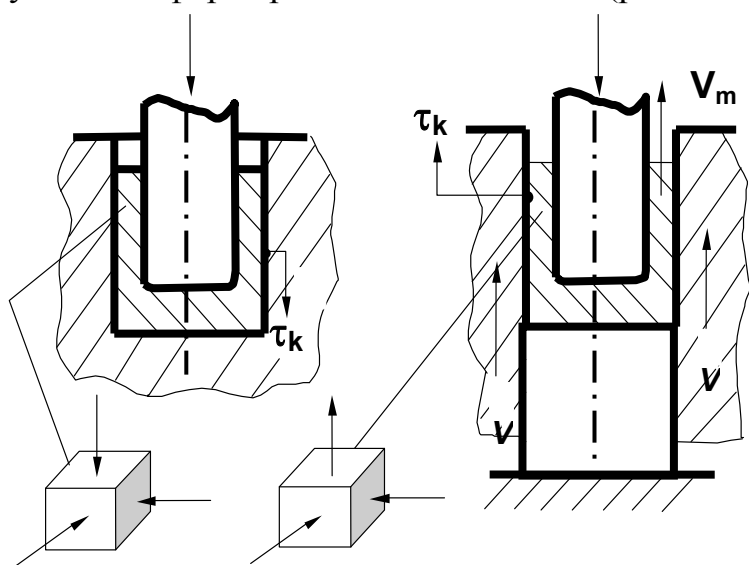


Рис.17.5. Контактные напряжения и схема напряженного состояния при выдавливании

Применение мягких прокладок при осадке позволяет предотвратить бочкообразование. Вращение инструмента при осадке в 3 – 5 раз снижает усилие деформирования, при уменьшении неравномерности деформации. В ОМД известны другие процессы, например, ротационное выдавливание или обкатка, где трение скольжения заменяется трением качения.

При прокатке работа, приходящаяся на единичную

ширину, определяется формулой

$$dW = \omega dt \cdot \int_0^a p(x) \cdot x \cdot dx, \quad (17.5)$$

где ω – угловая скорость ролика; dt – приращение времени; $p(x)$ – распределение нормального давления; x – координата; a – длина контактной зоны.

Подставляя в формулу (17.5) известное распределение давлений по Герцу, после интегрирования получим

$$\frac{dW}{dt} = \frac{2}{2\pi} \cdot p \cdot a \cdot \omega, \quad (17.6)$$

где p – контактная нагрузка.

Введем коэффициент гистерезисных потерь: α – доля максимальной упругой энергии, запасенной в теле за цикл нагружения. Тогда результирующий момент M , необходимый для поддержания движения, можно найти из соотношения $M = \frac{\alpha}{\omega} \cdot \frac{dW}{dt}$, откуда определяется коэффициент сопротивления качению:

$$\mu_k = \frac{M}{pR} = \alpha \cdot \frac{2a}{3\pi R}, \quad (17.7)$$

где R – радиус ролика.

Соотношение (17.7), предложенное Тейбором, хорошо подтверждается экспериментами на резине и хуже – на металлах. Кроме того, коэффициент α чувствителен к степени деформации и не вытекает явным образом из теоретических построений. Тем не менее в первом приближении формула (17.7) может применяться при расчетах процессов ОМД при небольших деформациях заготовки и инструмента.

Контрольные вопросы и упражнения

1. Приведите примеры положительной и отрицательной роли контактного трения в процессах ОМД.
2. Дайте определение контактного трения.
3. Чем отличается геометрия осажённой кольцевой заготовки на шероховатых бойках и гладких бойках со смазкой?
4. Начертите схему осадки цилиндрической заготовки, укажите силу трения сопротивления и силу трения активного действия; поясните роль каждой из них.
5. Дайте определение контактного касательного напряжения.
6. В чем состоит отличие контактного трения в ОМД от контактного трения в кинематических парах?
7. Перечислите пять отрицательных проявлений контактного трения.

8. Назовите три вида контактного трения.
9. Дайте характеристику сухого трения.
10. Нарисуйте схему схватывания и запишите условия разрушения материала.
11. Каковы меры предотвращения явления схватывания?
12. Назовите процессы, в которых может быть реализовано жидкостное трение и каковы условия для его реализации?
13. Напишите формулу для определения контактных касательных напряжений при жидкостной смазке.
14. Дайте общую характеристику жидкостного трения; какие явления при этом имеют место?
15. При каких условиях жидкие смазки переходят в твердые?
16. Нарисуйте схему реализации жидкостного трения при вытяжке.
17. Дайте характеристику граничного трения и условия его существования.
18. Запишите закон Амонтона – Кулона и поясните причины противоречия эксперимента и теории, использующей этот закон.
19. Какое дополнительное условие нужно принимать в расчет при пользовании законом Амонтона – Кулона.
20. Запишите формулу Зибеля для определения контактного трения и укажите ее ограничения (недостаток).
21. Назовите шесть основных факторов, влияющих на контактное трение.
22. Дайте пример влияния средства материала заготовки и инструмента на стойкость инструмента при обжиге стальных труб.
23. В чем проявляется анизотропия трения?
24. Как влияет характер нагрузки на деформирующее усилие?
25. Как соотносятся силы трения при отработке на молоте и на прессе и с каким параметром они коррелируют?
26. Какие положительные эффекты можно получить при учете контактного трения в процессах ОМД?
27. Как можно снизить усилие деформирования на 20 – 30% при холодном выдавливании? Привести схему.
28. Каковы пути предотвращения бочкообразования и снижения усилия деформирования в 3 – 5 раз при осадке?
29. Напишите алгоритм и вывод коэффициента сопротивления качению. От каких параметров зависит этот коэффициент?

Раздел 8. ЗАКОНЫ ПЛАСТИЧЕСКОЙ ДЕФОРМАЦИИ

Лекция 18. Законы пластической деформации

=====

1. Закон наименьшего сопротивления. 2. Влияние геометрических и физических факторов на неравномерность деформации. 3. Подобие при моделировании процесса пластической деформации в операциях ОМД.

=====

1. Закон наименьшего сопротивления формулируется следующим образом: любая материальная частица деформируемого тела, имеющая несколько кинематически возможных направлений перемещения, движется в направлении наименьшего сопротивления.

Хотя данная формулировка дает представление о процессе на качественном уровне, все же имеются подходы и к количественным оценкам. Известно, что при осадке в условиях изотропного трения перемещение частиц происходит **по кратчайшей нормали** к контуру, внешнему или внутреннему. Перемещения частиц в различных направлениях обратно пропорциональны сопротивлениям перемещению, а последние пропорциональны квадрату расстояния частицы от контура.

На рис.18.1 представлена осадка призматической заготовки (показано сечение, параллельное основанию призмы). В отсутствие трения на контактной поверхности контуры деформируются квазиравномерно (пунктирный прямоугольник).

При наличии трения на торцах заготовка в сечении стремится к эллиптической форме (криволинейный контур). Соответствие направления движения металла в выбранной точке соотношению скоростей V_1 и V_3 хорошо видно на рис.18.1. Заготовка стремится к овальной, а в пределе к круговой форме, что отвечает **принципу наименьшего периметра**, являющегося следствием закона наименьшего сопротивления.

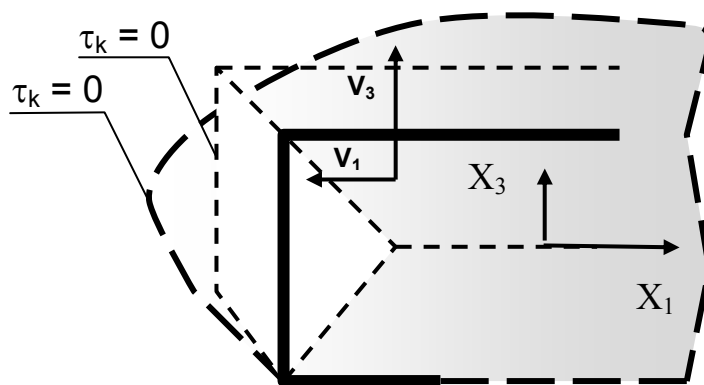


Рис. 18.1. Осадка призматической заготовки

Данный закон позволяет:

- 1) применять для производства асимметричных поковок заготовки квадратного сечения;
- 2) выполнением выборок в штампе (изменение сопротивления деформированию) повысить заполнение полостей и снизить усилие. Например, штам-

повка турбинных дисков диаметром более 500 мм в штампах с выборками уменьшает число ударов в 2 раза при экономии металла на 10 – 14%.

2. Кристаллическая структура металла, состоящая из разнонаправленных зерен, в строгом смысле слова не предполагает равномерности деформации тела при приложении к нему внешней нагрузки. **Равномерной** называется пластическая деформация, показатели которой не зависят от координат. **Неравномерность** пластической деформации обусловлена влиянием геометрических и физических факторов.

Влияние геометрических факторов проявляется, например, при гибке, где со стороны с большей кривизной деформации отрицательны, а с противоположной – положительны, причем по толщине они распределены также неравномерно. В разделительных операциях интенсивность деформаций, локализованных в узкой области, достигает предельного уровня разрушения заготовки.

Влияние физических факторов, например, при осадке цилиндрической заготовки проявляется в том, что вблизи торцов локальная относительная деформация намного меньше средней по объему из-за контактного трения, а при горячей деформации этот эффект еще более выражен вследствие подстуживания торцов.

В качестве количественной оценки Я. Н. Охрименко введен **коэффициент неравномерности деформации** K_H :

$$K_H = \varepsilon_{л} / \varepsilon_{ср}, \quad (18.1)$$

где $\varepsilon_{л}$ – локальная деформация; $\varepsilon_{ср}$ – средняя деформация по объему деформированной заготовки.

На рис.18.2 показано изменение K_H по объему цилиндрической заготовки, подверженной осадке.

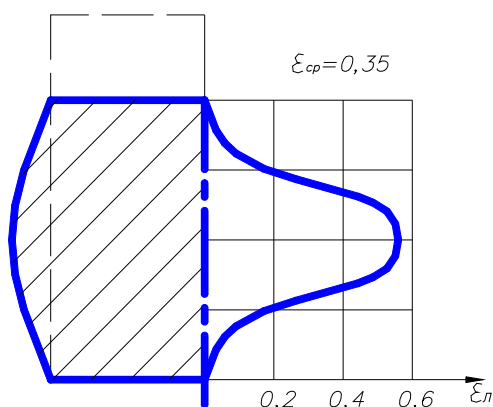


Рис. 18.2. Изменение показателя K_H при осадке образца $\varnothing 25 \times 37,5$ мм из Ст3 при $t = 1000$ °С

В зависимости от требований к детали при разработке технологии следует принимать меры к выравниванию деформаций (применение смазок, вибрационных нагрузок и т. п.), если это не противоречит условиям технологиче-

ского процесса. Этим снижается риск достижения предельных деформаций на локальных участках и создается возможность повышения служебных свойств (например, за счет снижения остаточных напряжений). Неравномерность деформации затрудняет процесс формообразования и снижает пластичность. Накопление локальных деформаций может приводить к образованию внутренних трещин и расслоений. Например, при штамповке деталей с ребрами и кольцевыми выступами (шатуны, вилки) из-за наличия застойных зон (рис. 18.3) возникает так называемый «прострел» – разрушение металла по границе застойной зоны.

Аналогичные результаты получаются при осадке низких заготовок (**кузнечные расслоения**), а также при протяжке (**ковочный крест**).

Предупреждение «прострела»:

- 1) уменьшение объема избыточного материала;
- 2) повышение пластичности металла.

Неравномерность деформации приводит к **разнозернистости**, а для предотвращения попадания в зону критических деформаций приходится назначать более высокие коэффициенты укова, что увеличивает трудоемкость. **Бочкообразность** при осадке вызывает необходимость назначения припуска на механическую обработку. В других случаях применяют **отделочные операции** (обкатку, выглаживание и т. п.). Пружинение при гибке иногда устраняют калибровкой в штампе или доводкой вручную по шаблонам.

Важными факторами обеспечения равномерности деформаций являются **равномерное температурное поле** и **силы контактного трения**. «Мягкие» прокладки, рельефные бойки, спаренные схемы **уменьшают** неравномерность деформации.

Рекомендации:

1. Приближать формы заготовки к форме поковки.
2. Избегать резких переходов в штампе во избежание застойных зон.
3. Применять эффективные смазки.

3. При создании новых технологий, где затруднено применение теоретических методов исследований, а экспериментальное изучение процесса на натуральных образцах сопряжено с большими затратами, исследования проводят на моделях. Перенос результатов с моделей на реальные объекты связан с понятием подобия условий пластической деформации. При таком подобии (модели и природы) **удельные усилия одинаковы**, силы относятся как **квадраты**, а работа

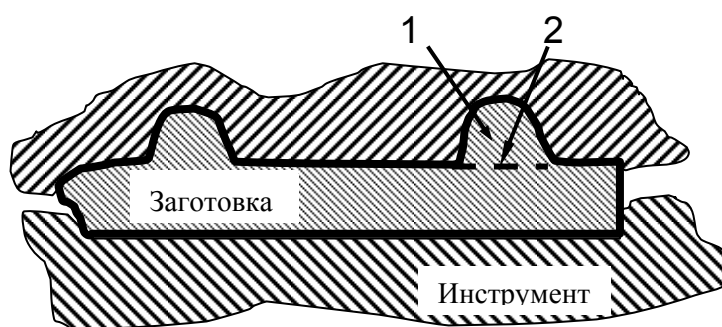


Рис. 18.3. Образование «прострела»:
1 – застойная зона; 2 – зона разрушения

деформации – как **кубы** сходственных размеров. Подобие условий пластической деформации включает **геометрическое** и **физическое** подобие.

Геометрическое подобие – подобие форм и размеров деформирующих инструментов:

$$n = l_1^n / l_1^m = \dots = l_k^n / l_k^m,$$

где $l_1^n \dots l_k^n$ – размеры натурального образца; $l_1^m \dots l_k^m$ – размеры модели.

Здесь n – константа подобия.

Физическое подобие требует идентичности:

1. Физических и механических свойств.
2. Температурных условий.
3. Степени и скорости деформации.
4. Условий трения.

Однако эти условия противоречивы и в комплексе не выполняются практически никогда. Тем не менее, часто требуется построение моделей для исследований до перехода к реальным процессам.

Основные направления моделирования:

1. Структура и свойства металлов.
2. Пластичность и сопротивление деформированию.
3. Исследование формоизменения.
4. Моделирование существующих процессов для их оптимизации.
5. Моделирование новых технологических процессов.

В ОМД особенно эффективно применение критериальных моделей.

Пусть, например, усилие деформирования дается функцией:

$$P = \Phi(\delta_s, f, a, b, l, h),$$

где δ_s – предел текучести; f – коэффициент трения; a, b, l, h – геометрические параметры.

Если же это уравнение представить в критериальном виде удельного усилия $P/(A \cdot \delta_s) = \varphi(f, a/h, b/h, l/h)$, то число параметров уменьшается, что существенно облегчает проведение планируемого эксперимента.

Более подробно вопросы моделирования и подобия рассматриваются в курсе «Математическое моделирование процессов ОМД».

Контрольные вопросы и упражнения

1. Сформулируйте закон наименьшего сопротивления.
2. Как движутся частицы деформируемого тела в условиях изотропного трения?
3. Как связано сопротивление перемещению и расстояние частицы от контура?
4. Как связаны перемещения частиц с сопротивлением перемещению?
5. Изобразите стадии осадки призматического тела.
6. Как влияет наличие трения на форму сечения заготовки?
7. Сформулируйте принцип наименьшего периметра.

8. Какой закон позволяет использовать заготовки квадратного сечения для производства асимметричных поковок?
9. Каким путем можно снизить потребное усилие и повысить заполнение полостей штампа?
10. Укажите экономический эффект при штамповке турбинных дисков в случае изменения технологии в соответствии с законами пластического деформирования.
11. Дайте определение равномерной пластической деформации.
12. Влиянием каких факторов обусловлена неравномерность пластической деформации?
13. Приведите примеры технологических процессов, где проявляется влияние геометрических факторов, приводящих к неравномерной деформации.
14. Укажите несколько физических факторов, приводящих к неравномерности деформации.
15. Дайте определение коэффициента неравномерности деформации.
16. Как зависит коэффициент неравномерности деформации от продольной координаты в процессе осадки цилиндрического образца? Проиллюстрируйте графически.
17. Какие меры принимают с целью выравнивания деформаций при формообразовании?
18. Укажите негативные следствия неравномерности деформаций.
19. Объясните, что такое «прострел» и причины его возникновения.
20. Проиллюстрируйте возникновение «прострела».
21. Какой дефект возникает при осадке низких заготовок?
22. Какой дефект возникает при протяжке?
23. Укажите пути предупреждения «прострела».
24. Укажите пути обхода зон критических деформаций. Имеют ли они негативные следствия?
25. В чем состоят негативные следствия бочкообразности при осадке цилиндрической заготовки?
26. Какими путями устраняют недостатки, связанные с неравномерностью пластической деформации?
27. Назовите два важнейших фактора обеспечения равномерности деформаций.
28. Какие способы применяют для перераспределения контактных напряжений?
29. Какие рекомендации можно дать для приближения технологических процессов к оптимальным?
30. Поясните понятие «подобие условий пластической деформации».
31. Поясните суть геометрического подобия.
32. В чем заключается физическое подобие?
33. Укажите основные направления моделирования.
34. Каким образом можно уменьшить число параметров в модели технологического процесса? Что этим достигается?

**Раздел 9. ЯВЛЕНИЯ, ОГРАНИЧИВАЮЩИЕ
ПЛАСТИЧЕСКОЕ ФОРМОИЗМЕНЕНИЕ**
Лекция 19. Разрушение при деформации

=====

1. Понятие разрушения. 2. Модель разрушения при развитой пластической деформации. 3. Методы определения критических деформаций.

=====

1. Стандарты определяют требования к изделиям, получаемым методами ОМД. При всем разнообразии этих требований в каждом из стандартов оговорено, что на изделиях не допускаются дефекты, связанные с разрушением металла.

Нарушение сплошности в виде микропор начинается уже на ранней стадии деформирования, и лишь к моменту исчерпания пластичности происходит лавинообразное возникновение микротрещин и наступает разрушение. Исчерпание пластичности можно оценить, если знать степень деформации в процессе деформирования. В.Л. Колмогоров предлагает мощность пластической деформации единичного объема характеризовать величиной ТН (Т – сопротивление деформации сдвига; Н – обобщенная характеристика скорости деформации сдвига). Обе эти величины выражаются через интенсивности напряжений и скоростей деформации.

Степень деформации – накопленная пластическая деформация за промежуток времени, принадлежащий $[0, t]$:

$$\mathbf{e}_\Sigma = \int_0^t \dot{\mathbf{e}}_i \cdot d\tau, \quad (19.1)$$

где $\dot{\mathbf{e}}_i = \mathbf{N}/\sqrt{3}$; τ – переменная интегрирования.

Степень деформации сдвига:

$$\Lambda = \int_0^t \mathbf{N} \cdot d\tau = \sqrt{3} \cdot \mathbf{e}_\Sigma. \quad (19.2)$$

Для случая простого нагружения (по А. А. Ильюшину, см. лекцию 16) или монотонного деформирования (по Г. А. Смирнову – Аляеву) величину Λ подсчитывают просто:

$$\Lambda = 2 \cdot \sqrt{\mathbf{e}_{11}^2 + \mathbf{e}_{11} \cdot \mathbf{e}_{22} + \mathbf{e}_{22}^2}, \quad (19.3)$$

где \mathbf{e}_{ij} – логарифмические деформации.

Пластичностью называют величину Λ_p – степень деформации сдвига к моменту разрушения, которая зависит от напряженного состояния (от инвариантов до девиаторов тензора напряжений, или от двух безразмерных параметров $(\frac{\sigma_{cp}}{T}$ и $\nu_\sigma)$):

$$\Lambda_p = f\left(\frac{\sigma_{cp}}{T}, \nu_\sigma\right), \quad (19.4)$$

где ν_σ – фактор Лоде.

Для решения вопроса о деформируемости следует установить возможность разрушения в наиболее опасных местах, для чего следует разработать модель разрушения.

2. Условие деформирования без разрушения можно сформулировать на основе (19.2) и (19.4) в следующем виде:

$$\Psi = \frac{\Lambda}{\Lambda_p} < 1, \quad (19.5)$$

где Ψ – степень использования запаса пластичности.

В момент разрушения $\Psi = 1$. Приращение степени использования запаса пластичности во времени на основании (19.2) и (19.5) имеет вид:

$$d\Psi = \frac{1}{\Lambda_p} \cdot H \cdot d\tau. \quad (19.6)$$

Учитывая, что в формуле (19.4) аргументы функции зависят от времени, вводя обозначение $\sigma_{cp}/T = k(\tau)$, на основании (19.6) получаем:

$$\Psi = \int_0^t \frac{H(\tau) \cdot d\tau}{\Lambda_p [k(\tau), \nu_\sigma(\tau)]} < 1. \quad (19.7)$$

Условие (19.7) хорошо согласуется с экспериментальными данными, если нагружение можно считать **квазимонотонным** (поворот движущихся частиц на угол не более $\pi/2$, а скорости не меняют знак). Экспериментальная проверка условия (19.7) при немонотонном деформировании показывает, что разрушение идет медленней, чем предсказывается моделью. На рис. 19.1 представлена схема экспериментов и их результаты в сравнении с теорией.

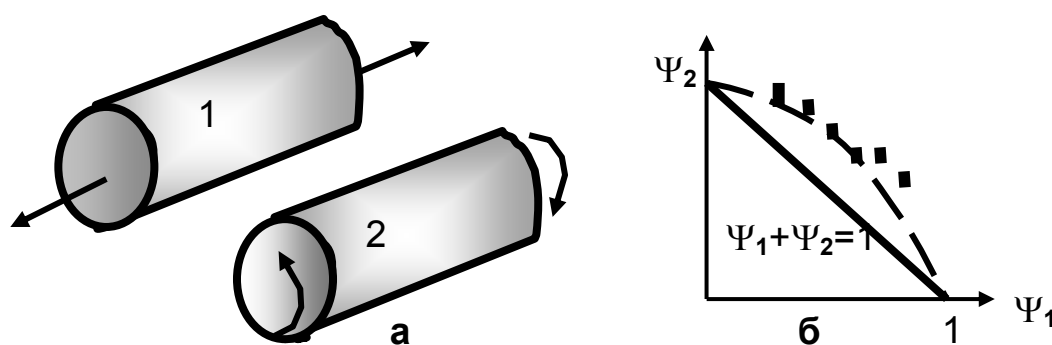


Рис. 19.1. Исследование немонотонной деформации

Цилиндрические образцы подвергались растяжению с последующим кручением до разрушения (рис. 19.1а). Теоретическая прямая и экспериментальные значения (рис. 19.1б) имеют существенное расхождение. Это объясняется эффектом «залечивания», образованием «мостиков схватывания». Это подтверждают и эксперименты Д. К. Булычева на медных образцах, подвергнутых растяжению до стадии поражения структуры микротрещинами и микропорами.

Далее, те же образцы были подвергнуты деформированию в условиях всестороннего сжатия, которое практически восстанавливало ресурс пластичности образцов, залечивало возникшие на первом этапе дефекты, причем действие только всестороннего сжатия не приводило к заметному улучшению качества.

При немонотонной деформации весь процесс можно разбить на n этапов, а эффект «залечивания» учесть с помощью показателей a_i для каждого i -го этапа. Тогда критерий отсутствия разрушений можно представить в виде

$$\Psi = \sum_{i=1}^n \Psi_i^{a_i} < 1, \quad (19.8)$$

где $a_i \geq 1$.

3. Экспериментальное определение характеристик, входящих в (19.8), выполнено В. Л. Колмогоровым, а также Х. Пью на цилиндрических образцах под внешним давлением. Характерные зависимости параметров Λ_p и a приведены на рис. 19.2а (для стали 08Х18Н10Т) и на рис. 19.2б (для стали 12Х1МФ). Параметр «а» имеет тенденцию к увеличению с ростом механических свойств материала (рис. 19.3).

На практике часто пользуются весьма приближенным критерием деформируемости (отсутствия разрушения):

$$e_{\max} \leq k \cdot e_{\text{пред}}, \quad (19.9)$$

где e_{\max} – максимальная деформация при формообразовании; $e_{\text{пред}}$ – предельная деформация для данного материала (фактически δ); k – некий коэффициент.

Соотношение (19.9) не учитывает вид напряженного состояния и ряд других факторов, однако эти издержки отчасти можно компенсировать за счет коэффициента k , подлежащего, однако, экспериментальному определению в специфических процессах. Существует значительное число методов определения критических деформаций: метод координатных сеток, метод визиопластичности, расчетные методы, однако для большинства процессов используют опосредованные показатели, например, коэффициент вытяжки, отбортовки и т. д., для которых имеются предельные значения в справочных руководствах (см., например, «Справочник

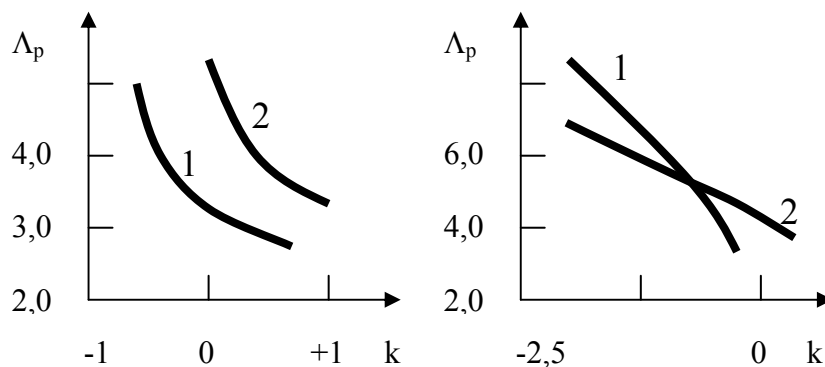


Рис. 19.2. Зависимость пластичности от k :
1 – $\nu_{\sigma} = 0$; 2 – $\nu_{\sigma} = -1$

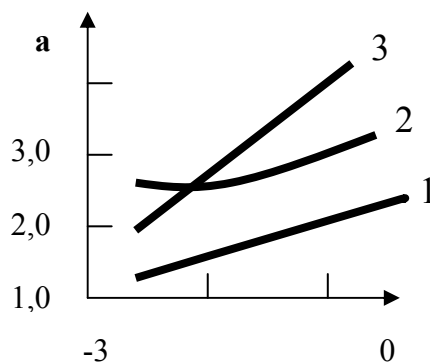


Рис. 19.3. Зависимость a от k при $\nu_{\sigma} = 0$;
1 – 08Х18Н10Т;
2 – Ст 45; 3 – ШХ 15

по холодной штамповке» В. П. Романовского).

Контрольные вопросы и упражнения

1. Какое требование к качеству изделия неизменно присутствует во всех стандартах?
2. Каков генезис разрушения?
3. Каким показателем можно характеризовать мощность пластической деформации единичного объема?
4. Как определяется степень деформации, накопленная за некоторый промежуток времени?
5. Каким соотношением задается степень деформации сдвига?
6. Запишите формулу степени деформаций сдвига для монотонного нагружения через деформации.
7. Как определяют пластичность в теории разрушения?
8. От каких параметров зависит пластичность?
9. Запишите два параметра, являющиеся аргументами функции пластичности. Поясните их смысл.
10. Сформулируйте общий вид критерия разрушения для монотонного нагружения.
11. Чему равно значение степени использования запаса пластичности?
12. Запишите критерий деформируемости для квазиомонотонного нагружения в интегральной форме.
13. Дайте определение квазиомонотонного нагружения.
14. Изобразите схему проведения экспериментов для подтверждения модели разрушения для случая немонотонной деформации.
15. Представьте графически результаты экспериментального исследования.
16. Как объясняется расхождение теоретических и экспериментальных данных?
17. Опишите суть и результаты экспериментов Д. К. Булычева.
18. Как влияет одно гидростатическое давление на повышение пластичности материала?
19. Какой вид имеет критерий деформируемости для немонотонного деформирования?
20. Изобразите характерные зависимости пластичности от относительного среднего напряжения.
21. Как влияет на пластичность фактор Лоде?
22. Изобразите зависимость показателя «а» от относительного среднего давления для Ст 45.
23. Каким приближенным критерием деформируемости пользуются на практике?
24. В чем состоят недостатки приближенного критерия?
25. Назовите методы определения критических деформаций и поясните, как на практике судят о деформируемости.

**Раздел 10. МЕТОДЫ ТЕОРЕТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА
ПРОЦЕССОВ ОБРАБОТКИ МЕТАЛЛОВ ДАВЛЕНИЕМ**

Лекция 20. Общая характеристика методов ТОМД

=====

1. Общие представления о методах ТОМД: классификация, краткая характеристика. 2. Модель процесса обработки металлов давлением. 3. Метод интегрирования дифференциальных уравнений равновесия совместно с условием пластичности. 4. Инженерный метод.

=====

1. Методы решения задач ТОМД можно разделить на аналитические и экспериментально-аналитические (табл. 20.1). Решаемые задачи ТОМД можно разделить на четыре класса:

1. Анализ силового режима (определение усилия и работы деформации).
2. Определение распределения нагрузок и предельных нагрузок для расчета оснастки и назначения ее коэффициентов запаса прочности.
3. Анализ формоизменения, выбор рациональных размеров исходной заготовки и ее промежуточных форм.
4. Обеспечение качества деталей, определение предельных возможностей технологического процесса.

Таблица 20.1

Обзор методов ОМД

№	Методы	Класс задач				Ограничения		
		1	2	3	4	А	Б	В
	Аналитические							
1	Прямого интегрирования	+	+	+	+			
2	Инженерный	+	+	+	–	по	–	уо
3	Метод линий скольжения	+	+	–	+	п, 1ст	тгп	бу
4	Энергетический	+	–	+	+	–	тп,боп	–
5	Прямой вариационный	+	+	+	+	–	тп,боп	–
6	Верхней оценки	+	–	+	–	по	тгп,тп	уо
7	Конечных элементов	+	+	+	+	–	тп,боп	–
	Экспериментально-аналитические							
1	Сопротивления пластическим деформациям материала	+	+	–	+	по	тэ	–
2	Визиопластический	+	+	+	+	по	тэ,сэт,тп	–
3	Муаровых полос	+	+	–	+	по	тэ,сэт,тп	–
4	Распределения твердости	+	+	–	+	по	тэ,сэт,тп	–

Решение указанных задач основано на феноменологическом подходе и общих методах механики сплошных сред. В табл. 20.1 крестиком указана возможность решения этих задач. Здесь же отмечены ограничения: **A** – на область применения метода (**п** – преимущественно для плоских и осесимметричных задач; **по** – преимущественно для плоских и осесимметричных задач; **1ст** – одномерные задачи); **B** – на методику решения задач (**тгп** – большой объем графических построений; **тп** – проблемы отладки программ на ЭВМ; **боп** – требуется большой объем памяти ЭВМ; **тэ** – трудоемкий эксперимент и обработка; **сэт** – применение специальной сложной техники и аппаратуры); **B** – на результаты решения (**бу** – без учета упрочнения; **уо** – учет упрочнения).

2. Модель процесса ОМД представляется набором уравнений теории пластичности:

1. Уравнения равновесия:

$$\sigma_{ij,j} = 0 \quad .$$

2. Условие пластичности:

$$\sigma_i = \sigma_s \quad .$$

3. Соотношение между напряжениями и деформациями (физические уравнения теории пластичности):

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{E} \cdot \left[\sigma_1 - \frac{1}{2} \cdot (\sigma_2 + \sigma_3) \right] \quad \dots \dots$$

4. Уравнения неразрывности деформаций:

$$\varepsilon_{mij} \cdot \varepsilon_{nik} \cdot \varepsilon_{ij,lk} = 0 \quad .$$

5. Граничные условия.

При необходимости сюда могут присоединяться уравнения механики, уравнения термодинамики, вводятся величины скоростей деформации, условие пластичности может изменяться для учета упрочнения, анизотропии и т. д. Данная система уравнений является громоздкой и для трехмерного случая в общем виде аналитически неразрешима, поэтому ее используют при ряде упрощающих допущений.

3. Для некоторых классов задач применяют так называемый метод прямого интегрирования, в котором используют упрощенное условие пластичности (см. лекцию 15), а также ряд других упрощающих допущений. К сожалению, для решения подобных задач отсутствуют какие-либо алгоритмы, и успех определяется квалификацией исследователя, его изобретательностью и интуицией. Для решения двумерных задач часто применяют упрощенный вариант метода прямого интегрирования – инженерный метод.

4. Инженерный метод состоит в решении уравнений равновесия совместно с упрощенным условием пластичности при заданных граничных условиях. Метод позволяет определять распределение действующих напряжений и применяется для решения плоских и осесимметричных задач. Если взять уравне-

ние равновесия для осесимметричных задач и положить, что коэффициент трения равен нулю (см. лекцию 12), то уравнение равновесия примет вид

$$\frac{\partial \sigma_{\rho}}{\partial \rho} + \frac{\sigma_{\rho} - \sigma_{\theta}}{\rho} = 0. \quad (20.1)$$

Условие пластичности можно взять в виде:

$$\sigma_{\rho} - \sigma_{\theta} = \sigma_{\mathbf{S}}^*. \quad (20.2)$$

Данная система решается совместно с граничными условиями.

$$\sigma_{\rho} \Big|_r = f(\rho) \quad (20.3)$$

Разумеется, уравнения (20.1) – (20.3) не исчерпывают всего многообразия постановок задач, решаемых инженерным методом

Пример. Решим задачу о раздаче толстостенной трубы внутренним давлением «р». Внутренний и наружный радиусы кривизны трубы равны r и R соответственно. Механические характеристики, в частности, предел текучести материала, считаются известными. Задача состоит в выяснении связи между параметрами трубы и внутренним давлением в момент приведения трубы в пластическое состояние. Задача может быть поставлена и по-другому: какой толщины должна быть стенка трубы, если задан один из радиусов и внутреннее давление при известных характеристиках материала трубы, чтобы выдерживать внутреннее давление без перехода в пластическое состояние?

Решение. Условие пластичности (20.2) для данной задачи должно иметь знак «–» в правой части для согласования знаков окружных напряжений, а поэтому уравнение (20.1) принимает вид

$$\frac{d\sigma_{\rho}}{d\rho} = \frac{\sigma_{\mathbf{S}}^*}{\rho}. \quad (20.4)$$

Решение дифференциального уравнения (20.4) приводит к зависимости:

$$\sigma_{\rho} = \sigma_{\mathbf{S}}^* \ln \rho + C. \quad (20.5)$$

Граничные условия (20.3) с учетом нулевых значений нормальных напряжений на внешнем контуре используем для определения C .

$$\sigma_{\rho}(R) = 0 = \sigma_{\mathbf{S}}^* \ln R + C. \quad (20.6)$$

Подстановка значения C из (20.6) в (20.5) приводит к решению:

$$\sigma_{\rho}(\rho) = -\sigma_{\mathbf{S}}^* \ln \frac{R}{\rho}. \quad (20.7)$$

На внутреннем контуре (при $\rho = r$) нормальное напряжение равно $-p$, следовательно, из (20.7) следует:

$$\sigma_{\rho}(r) = -p = -\sigma_{\mathbf{S}}^* \ln \frac{R}{r}. \quad (20.8)$$

Соотношение (20.8) резюмирует решение исходной задачи.

Контрольные вопросы и упражнения

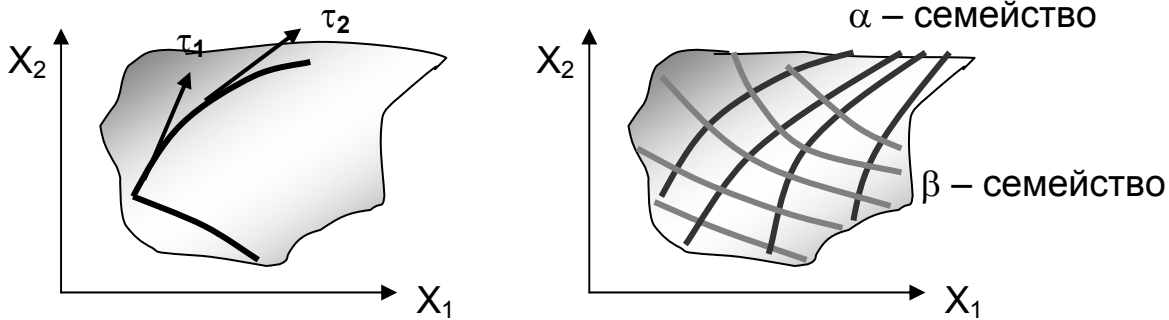
1. Назовите четыре класса задач, решаемых ТОМД.
2. Что является основой четырех классов задач ТОМД?
3. Назовите семь аналитических методов решения задач ТОМД.
4. Назовите четыре экспериментально-аналитических метода решения задач ТОМД.
5. Перечислите группы уравнений и условий, входящих в модель процесса ОМД.
6. Какими дополнительными соотношениями может дополняться модель в зависимости от вида процесса?
7. В чем состоит метод прямого интегрирования?
8. Почему в методе прямого интегрирования используют преимущественно упрощенное условие пластичности?
9. Для каких классов задач применяют инженерный метод?
10. Какие группы уравнений модели процесса ОМД используют в инженерном методе?
11. Запишите уравнение равновесия и условие пластичности для осесимметричной задачи с осесимметричным распределением внешней нагрузки.
12. Решите задачу о приведении трубы в пластическое состояние внешним давлением.
13. Решите задачу о приведении трубы в пластическое состояние одновременно внутренним и внешним давлениями.
14. Как из решений задач о приведении трубы в пластическое состояние получить значение толщины трубы?
15. Какие предельные состояния могут наблюдаться, если стенка трубы достаточно тонкая?
16. Проиллюстрируйте зависимости к трем указанным выше вариантам нагружения толстостенных труб.

Лекция 21. Метод линий скольжения

- =====
1. Основные уравнения метода линий скольжения.
 2. Уравнения Генке.
 3. Первая и вторая теоремы Генке.
 4. Свойства линий скольжения: обзор.
 5. Уравнения Гейрингер.
- =====

I. Метод линий скольжения (МЛС) был разработан в 20-е годы 20 в. Г. Генке и Л. Прандтлем. Метод состоит в **построении сетки (поля) линий скольжения и использовании их свойств**. Применяется в основном для решения **плоских и осесимметричных задач** для весьма широкого класса процессов преимущественно объемной штамповки.

Если определять в каждой точке некоего тела, подверженного деформации, касательные напряжения, то можно обнаружить линии, к которым эти напряжения будут направлены по касательным. Линии такого вида называются **линиями скольжения** (линиями Чернова-Людерса) и они образуют два ортогональных друг другу семейства (рис. 21.1).



В рамках плоского деформированного состояния рассмотрим выделенные линии α – и β – семейства, по отношению к которым линии уровня главных напряжений σ_1 и σ_3 располагаются под углом $\pi/4$ (рис. 21.2). Для выбранной точки рис. 21.2 для каждого из семейств можно составить соответствующие уравнения:

$$\frac{dx_3}{dx_1} = \operatorname{tg} \varpi \quad (\text{семейство } \alpha), \quad (21.1)$$

$$\frac{dx_3}{dx_1} = -\operatorname{ctg} \varpi \quad (\text{семейство } \beta). \quad (21.2)$$

Уравнения (21.1) и (21.2) определяют коэффициенты в уравнениях касательных к линиям каждого из семейств, перпендикулярных друг другу (см. курс аналитической геометрии): $y_1 = k_1 x + b$; $y_2 = k_2 x + c$; $k_1 \cdot k_2 = -1$.

Очевидно, углы φ и ϖ связаны между собой простым соотношением:

$$\varpi = \varphi + \frac{\pi}{4}.$$

При плоском деформированном состоянии напряжения определяются из уравнений (11.12); заменой $\sigma_{\tau}^{\max} \rightarrow k$; $\varphi \rightarrow \varpi - \frac{\pi}{4}$ перейдем к уравнениям для определения компонент напряжений:

$$\begin{aligned}\sigma_{11} &= \sigma_{cp} + k \cdot \sin 2\omega; \\ \sigma_{33} &= \sigma_{cp} - k \cdot \sin 2\omega \\ \sigma_{31} &= -k \cdot \cos 2\omega.\end{aligned}\quad (21.3)$$

Напряжения (21.3) удовлетворяют условию пластичности (15.12) и в дальнейшем за соблюдением выполнения условия пластичности следить не нужно. Уравнения равновесия (7.15) для случая плоской деформации принимают вид:

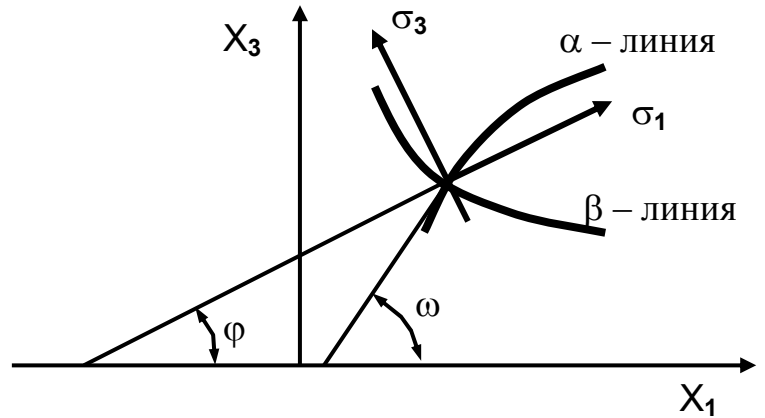


Рис. 21.2. Главные напряжения и линии скольжения

$$\begin{cases} \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{13}}{\partial x_3} = 0 \\ \frac{\partial \sigma_{13}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{33}}{\partial x_3} = 0 \end{cases} \quad (21.4)$$

Подстановка (21.3) в (21.4) приводит к основным уравнениям МЛС:

$$\begin{cases} \frac{\partial \sigma_{cp}}{\partial x_1} + 2 \cdot k \cdot \cos 2\omega \cdot \frac{\partial \omega}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{13}}{\partial x_3} + 2 \cdot k \cdot \sin 2\omega \cdot \frac{\partial \omega}{\partial x_3} = 0 \\ \frac{\partial \sigma_{cp}}{\partial x_1} - 2 \cdot k \cdot \cos 2\omega \cdot \frac{\partial \omega}{\partial x_1} + 2 \cdot k \cdot \sin 2\omega \cdot \frac{\partial \omega}{\partial x_3} = 0 \end{cases} \quad (21.5)$$

2. Перенесем начало системы координат (рис. 21.2) в узловую точку и повернем систему координат так, чтобы ось x_1 совпадала с касательной к α – линии, а ось x_3 совпадала бы с касательной к β – линии. Координаты α и β называются криволинейными.

Перенос начала системы координат и переход к криволинейным координатам приводит к следующим изменениям в (21.5):

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_3} &\rightarrow \frac{\partial}{\partial \alpha}, \frac{\partial}{\partial \beta}; \quad \omega = 0; \quad \frac{\partial \omega}{\partial \alpha} \neq 0; \quad \frac{\partial \omega}{\partial \beta} \neq 0; \\ \begin{cases} \frac{\partial \sigma_{cp}}{\partial \alpha} + 2 \cdot k \cdot \frac{\partial \omega}{\partial \alpha} = 0 \\ \frac{\partial \sigma_{cp}}{\partial \beta} - 2 \cdot k \cdot \frac{\partial \omega}{\partial \beta} = 0 \end{cases} \end{aligned} \quad (21.6)$$

Из (21.6) получаем интегралы Генке:

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} \cdot (\sigma_{\text{ср}} + 2 \cdot \mathbf{k} \cdot \omega) = 0 \Rightarrow \sigma_{\text{ср}} + 2 \cdot \mathbf{k} \cdot \omega = \mathbf{C}_1(\beta) = 2 \cdot \mathbf{k} \cdot \eta(\beta) . (*) , \quad (21.7)$$

$$\frac{\partial}{\partial \beta} \cdot (\sigma_{\text{ср}} - 2 \cdot \mathbf{k} \cdot \omega) = 0 \Rightarrow \sigma_{\text{ср}} - 2 \cdot \mathbf{k} \cdot \omega = \mathbf{C}_2(\alpha) = 2 \cdot \mathbf{k} \cdot \xi(\alpha) . (**) \quad (21.8)$$

(*) – при движении вдоль α – линии $\eta(\beta) = \text{const}$;

(**) – при движении вдоль β – линии $\xi(\alpha) = \text{const}$.

Для получения уравнений Генке, пригодных для практического использования, возьмем на β – линии точки Р и М, для которых справедливо уравнение (21.8). Для соотнесения входящих величин с соответствующей точкой снабдим их верхним индексом, соответствующим выбранной точке. Тогда при движении вдоль β – линии выражение $\sigma_{\text{ср}} - 2 \cdot \mathbf{k} \cdot \omega$ остается постоянным:

$$\begin{aligned} \sigma_{\text{ср}}^{\text{М}} - 2 \cdot \mathbf{k} \cdot \omega^{\text{М}} &= 2 \cdot \mathbf{k} \cdot \xi(\alpha) = \sigma_{\text{ср}}^{\text{Р}} - 2 \cdot \mathbf{k} \cdot \omega^{\text{Р}} . \\ \sigma_{\text{ср}}^{\text{М}} - \sigma_{\text{ср}}^{\text{Р}} &= 2 \cdot \mathbf{k} \cdot (\omega^{\text{М}} - \omega^{\text{Р}}) = 2 \cdot \mathbf{k} \cdot \theta^{\text{МР}} \text{ (дл } \beta \text{ – линии)} . \end{aligned} \quad (21.9)$$

Очевидно, если бы точки М и Р находились на α – линии, то в правой части уравнения (21.9) был бы знак « \leftrightarrow », поскольку в этом случае следовало бы использовать уравнение (21.7). Окончательно приняв абстрактные точки А и В, из предшествующего по аналогии с (21.9) получим **уравнения Генке**:

$$\sigma_{\text{ср}}^{\text{А}} - \sigma_{\text{ср}}^{\text{В}} = \pm 2 \cdot \mathbf{k} (\omega_{\text{А}} - \omega_{\text{В}}) , \quad (21.10)$$

где знак « \leftrightarrow » относится к α -линии, а знак « \pm » – к β – линии.

Из уравнений (21.10) следует, что если поле линий скольжения известно, то для двух точек всегда можно определить правую часть уравнения (21.10), а следовательно, среднее напряжение в одной из точек, если задано среднее напряжение в другой. Это позволяет вычислять напряжения под инструментом, если известны напряжения на свободной поверхности или в какой-либо другой точке и задача заключается преимущественно в построении подходящего поля линий скольжения, для чего необходимо использовать их свойства.

3. Рассмотрим два важных свойства линий скольжения, которые даются двумя теоремами Генке.

Первая теорема Генке. Рассмотрим переход из точки М в точку Q (рис. 21.3), чисто формально добавляя и вычитая средние значения напряжений в точке Р, а затем в точке N:

$$\begin{aligned} \sigma_{\text{ср}}^{\text{М}} - \sigma_{\text{ср}}^{\text{Q}} &= (\sigma_{\text{ср}}^{\text{М}} - \sigma_{\text{ср}}^{\text{Р}}) + (\sigma_{\text{ср}}^{\text{Р}} - \sigma_{\text{ср}}^{\text{Q}}) = \\ &= 2 \cdot \mathbf{k} \cdot (\omega^{\text{М}} - \omega^{\text{Р}}) - 2 \cdot \mathbf{k} \cdot (\omega^{\text{Р}} - \omega^{\text{Q}}) = 2 \cdot \mathbf{k} \cdot (\omega^{\text{М}} - 2 \cdot \omega^{\text{Р}} + \omega^{\text{Q}}) . \end{aligned} \quad (21.11)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{\text{ср}}^{\text{М}} - \sigma_{\text{ср}}^{\text{Q}} &= (\sigma_{\text{ср}}^{\text{М}} - \sigma_{\text{ср}}^{\text{N}}) + (\sigma_{\text{ср}}^{\text{N}} - \sigma_{\text{ср}}^{\text{Q}}) = \\ &= - 2 \cdot \mathbf{k} \cdot (\omega^{\text{М}} - \omega^{\text{N}}) + 2 \cdot \mathbf{k} \cdot (\omega^{\text{N}} - \omega^{\text{Q}}) = 2 \cdot \mathbf{k} \cdot (-\omega^{\text{М}} + 2 \cdot \omega^{\text{N}} - \omega^{\text{Q}}) . \end{aligned} \quad (21.12)$$

Приравнивая правые части (21.11) и (21.12), получим:

$$2 \cdot \omega^P - \omega^M - \omega^Q = \omega^M + \omega^Q - 2 \cdot \omega^N.$$

$$\omega^P - \omega^M = \omega^Q - \omega^N = \theta. \quad (21.13)$$

Формула (21.13) есть формулировка **первой теоремы Генке**:

угол между касательными к двум линиям скольжения одного и того же семейства в точках пересечения их каждой линией скольжения другого семейства остается неизменным.

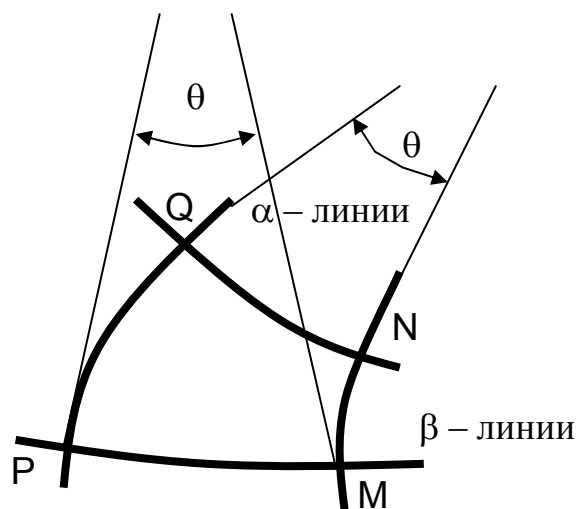


Рис. 21.3. К первой теореме Генке

Вторая теорема Генке. Рассмотрим длину дуг линий скольжения, связанных через радиусы кривизны и соответствующие углы (рис. 21.4).

Длина дуги РМ может быть определена двояко: с использованием приращения радиуса и с использованием приращения дуги, что в символическом виде представляется таким образом:

$$(R_\beta + dR_\beta) \cdot d\theta' = (R_\beta + dS_\alpha) \cdot d \cdot \theta. \quad (21.14)$$

В силу первой теоремы Генки:

$$d\theta' = d\theta = d\theta_\alpha. \text{ Тогда из (21.14) следует:}$$

$$dR_\beta = dS_\alpha. \quad (21.15)$$

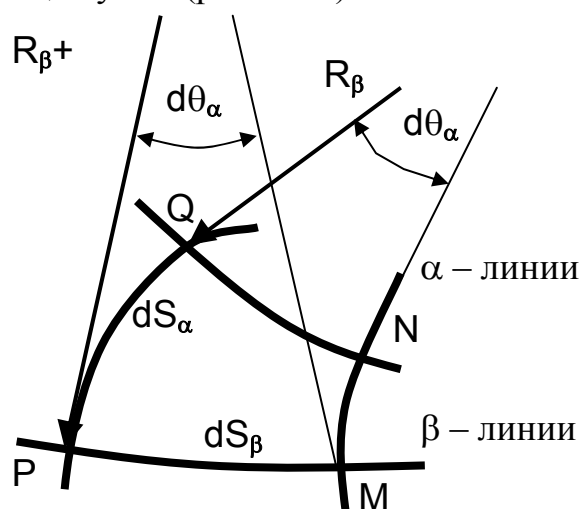


Рис. 21.4. Ко второй теореме Генке

Справедливо аналогичное соотношение и для линий другого семейства:

$$dR_\alpha = dS_\beta. \quad (21.16)$$

Формулы (21.15), (21.16) суть **вторая теорема Генке**:

при перемещении вдоль линии скольжения одного семейства, радиусы кривизны линий второго семейства в точках их пересечения с линиями скольжения первого семейства изменяются на величину пройденных расстояний.

4. Свойства линий скольжения:

1. Линии скольжения образуют два непрерывных и взаимно перпендикулярных семейства.

2. Линии скольжения располагаются под углом 45° по отношению к главным напряжениям.

3. Изменение среднего напряжения пропорционально изменению угла поворота касательной к линии скольжения.

4. Первая теорема Генке.

5. Вторая теорема Генке.

6. Линии скольжения выходят на свободную поверхность под углом 45° .

Это следует из анализа касательного напряжения в (21.3):

$\sigma_{31} = -k \cos 2\omega$. На свободной поверхности $\sigma_{31} = 0$, откуда

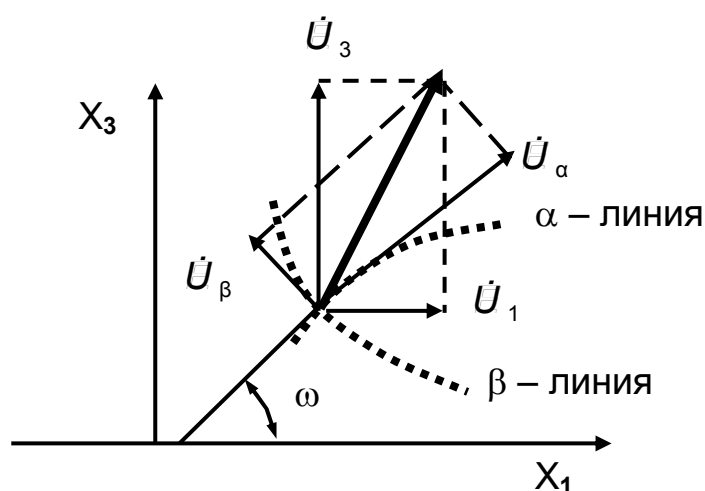


Рис. 21.5. Компоненты скоростей в МЛС

$$\cos 2 \cdot \omega = 0, \text{ или } \omega = \pm \frac{\pi}{4}.$$

7. На контактной поверхности угол наклона линий скольжения зависит от условий трения. При максимальном значении касательного напряжения

$$\sigma_{31} = k \cdot \cos 2 \cdot \omega = k,$$

откуда $\cos 2 \cdot \omega = 1$, или $\omega = 0$. Следовательно, на контактной поверхности $0 < |\omega| < \pi/4$.

5. Выбор полей линий скольжения для реального процесса не однозначен. Выбранное произвольно поле линий скольжения может удовлетворять физическим уравнениям, условиям пластичности и условиям равновесия, но может не удовлетворять кинематическим условиям. Выразим компоненты скоростей в декартовой системе координат через компоненты скоростей $\dot{U}_\alpha, \dot{U}_\beta$ в криволинейной системе координат (рис. 21.5) из геометрического рассмотрения:

$$\dot{U}_1 = \dot{U}_\alpha \cdot \cos \omega - \dot{U}_\beta \cdot \sin \omega$$

$$\dot{U}_3 = \dot{U}_\alpha \cdot \sin \omega + \dot{U}_\beta \cdot \cos \omega$$

Умножением каждого из этих уравнений на $\cos \omega$ и $\sin \omega$ соответственно и их последовательным сложением получим первое из обратных преобразований:

$$\dot{U}_\alpha = \dot{U}_1 \cdot \cos \omega + \dot{U}_3 \cdot \sin \omega. \quad (21.17)$$

Умножением каждого из вышеприведенных уравнений на $\sin\omega$ и $\cos\omega$ соответственно и их последовательным вычитанием получим второе обратное преобразование:

$$\dot{U}_\beta = -\dot{U}_1 \cdot \sin\omega + \dot{U}_3 \cdot \cos\omega . \quad (21.18)$$

Произведем дифференцирование (21.17) по криволинейной координате S_α , а (21.18) – по S_β с целью получения следующих соотношений:

$$\frac{\partial \dot{U}_\alpha}{\partial S_\alpha} = \dot{U}_\beta \cdot \frac{\partial \omega}{\partial S_\alpha} + \frac{\partial \dot{U}_1}{\partial x_1} + \frac{\partial \dot{U}_3}{\partial x_3} . \quad (21.19)$$

$$\frac{\partial \dot{U}_\beta}{\partial S_\beta} = -\dot{U}_\alpha \cdot \frac{\partial \omega}{\partial S_\beta} - \frac{\partial \dot{U}_1}{\partial x_1} - \frac{\partial \dot{U}_3}{\partial x_3} . \quad (21.20)$$

Учитывая условие несжимаемости для скоростей деформаций, из (21.19) и (21.20) получаем:

$$\frac{\partial \dot{U}_\alpha}{\partial S_\alpha} = \dot{U}_\beta \cdot \frac{\partial \omega}{\partial S_\alpha} ; \quad \frac{\partial \dot{U}_\beta}{\partial S_\beta} = -\dot{U}_\alpha \cdot \frac{\partial \omega}{\partial S_\beta} ,$$

откуда вследствие независимости координат получаем окончательно уравнения Гейрингера:

$$d\dot{U}_\alpha - \dot{U}_\beta \cdot d\omega = 0 \quad (\text{вдоль } \alpha - \text{ линии}); \quad (21.21)$$

$$d\dot{U}_\beta - \dot{U}_\alpha \cdot d\omega = 0 \quad (\text{вдоль } \beta - \text{ линии}). \quad (21.22)$$

Уравнения (21.21) и (21.22) гарантируют соблюдение кинематических условий в процессе деформирования. Если условия Гейрингера не выполняются, то кинематически возможные поля скоростей и линии скольжения дают заниженную оценку напряжений.

Контрольные вопросы и упражнения

1. В чем состоит суть метода линий скольжения?
2. Назовите класс задач, решаемых МЛС.
3. Как расположены друг относительно друга два семейства линий Чернова – Людерса? Изобразите их.
4. Запишите уравнения для коэффициентов касательных к линиям скольжения и сами уравнения линий скольжения.
5. Как связаны углы касательных с линиями скольжения и траекториям главных напряжений?

6. Запишите выражения напряжений для условий плоской деформации.
7. Запишите уравнения равновесия для условий плоской деформации.
8. Сделайте вывод основных уравнений МЛС.
9. Выполните переход от основных уравнений МЛС к уравнениям в криволинейной системе координат.
10. Сделайте вывод уравнений Генке.
11. Выполните рисунок к первой теореме Генке и дайте пояснения.
12. Выполните переход между узловыми точками с различными промежуточными для доказательства первой теоремы Генке.
13. Дайте вербальную формулировку первой теоремы Генке.
14. Дайте графическую иллюстрацию и вывод второй теоремы Генке.
15. Дайте словесную формулировку второй теоремы Генке.
16. Дайте обзор семи свойств линий скольжения.
17. Изобразите компоненты скорости в узловой точке в декартовой и криволинейной системах координат.
18. Запишите прямые соотношения для скоростей (в декартовой системе).
19. Сделайте переход к обратным соотношениям для скоростей.
20. Выполните дифференцирование скоростей по криволинейным координатам.
21. Получите уравнения Гейрингер, дайте их интерпретацию.

Лекция 22. Метод верхней оценки. Метод СПДМ

=====

1. Метод верхней оценки. Теоретические основы метода. Годограф скоростей. 2. Вдавливание пуансона в полуплоскость. 3. Метод сопротивления пластическим деформациям материала (СПДМ). Алгоритм определения деформаций.

=====

1. Метод верхней оценки разработан Джонсоном В. и Кудо Х. для решения задач объемного деформирования (квазистатические процессыковки, штамповки, осадки, прямого, обратного и комбинированного выдавливания) при упрощающих допущениях, аналогичных допущениям в методе линий скольжения. Метод позволяет вычислять потребное усилие формообразования и удельное усилие. Суть метода состоит в том, что объем очага деформации заменяется набором жестких блоков, т. е. производится замена действительного поля линий скольжения системой прямолинейных отрезков. Блоки представляют собой треугольные призмы (рис. 22.1). Внутри каждого блока скорость постоянна. Число и размеры блоков первоначально выбирают произвольно. Вдоль границ касательные напряжения берут максимальными: $\sigma_t = k$; на свободной поверхности $\sigma_t = 0$; на контактных поверхностях $\mathbf{f} \cdot \sigma_s^* \leq \sigma_t \leq k$.

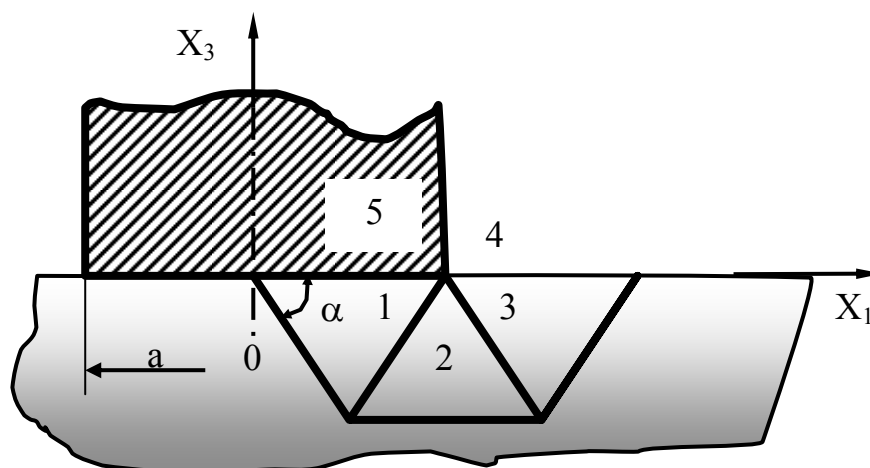


Рис. 22.1. Внедрение пуансона в полупространство

При внедрении пуансона в полупространство **мгновенная мощность внутренних сил** определяется следующей зависимостью:

$$W = \sum_i \sigma_t^i \cdot \dot{U}_i \cdot L_i \cdot b_i,$$

где σ_t^i – касательные напряжения; \dot{U}_i – скорость скольжения вдоль границ; L_i – длины сторон треугольников при плоской деформации; b_i – длина проекции площадки контакта в направлении x_2 .

Мгновенная мощность на пуансоне:

$$W = P \dot{U}_0.$$

Здесь \dot{U}_0 – скорость движения пуансона; P – полное усилие.

Приравняв правые части мгновенных мощностей в деформируемом теле и на пуансоне, получим:

$$P = \frac{\sum_i \sigma_t^i \cdot \dot{U}_i \cdot L_i \cdot b_i}{\dot{U}_0}. \quad (22.1)$$

Для использования формулы (22.1) необходимо определить составляющие скоростей с помощью **годографа**: векторного представления скоростей движения блоков. Отметим, что на границах 0 – 1; 0 – 2; 0 – 3 нормальных составляющих скоростей нет, а на границах 1 – 2; 2 – 3 существуют

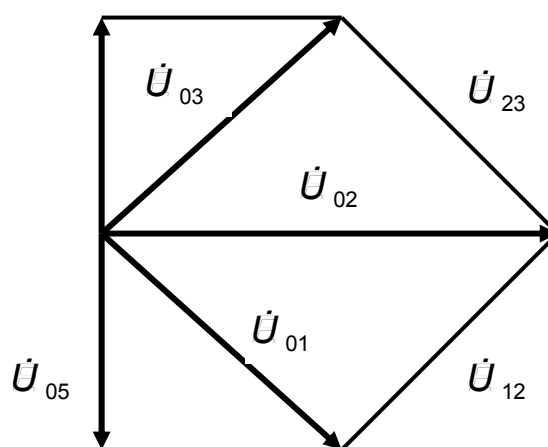


Рис. 22.2. Годограф скоростей

разрывы нормальных скоростей. Представим скорости применительно к рис. 22.1 соответствующими векторами (рис. 22.2). Для определения мощности внутренних сил в рассмотрение следует принять только блоки деформируемого тела 1, 2, 3 и соответствующие скорости с годографа скоростей.

2. Пример применения метода верхней оценки: вдавливание пуансона в полупространство. Для данного рассмотрения пригодно представление схемы деформирования рис. 22.1 и годографа скоростей согласно рис. 22.2. Рассмотрим только правую часть полуплоскости под пуансоном вследствие симметрии. Обозначим удельное усилие буквой « p », а полное усилие буквой « P ». Будем считать, что все блоки имеют одну и ту же длину b в направлении оси x_2 . Тогда полное усилие для выбранной части пуансона равно:

$$P = p \cdot \frac{a}{2} \cdot b,$$

а уравнение (22.1) примет вид

$$p \cdot \frac{a}{2} \cdot b \cdot \dot{u}_0 = b \sum_{i=1}^n \sigma_{\tau}^i \cdot \dot{u}_i \cdot l_i, \text{ или } p = \frac{\sigma_{\tau} \cdot 2 \sum \dot{u}_i \cdot l_i}{\dot{u}_0 \cdot a} = \frac{\sigma_s^* \sum \dot{u}_i \cdot l_i}{\dot{u}_0 \cdot a}. \quad (22.2)$$

Здесь значение касательного напряжения принято максимальным.

Из геометрии рис. 22.1 вычислим значения длин ребер блоков:

$$l_{01} = \frac{a}{4 \cos \alpha}; \quad l_{03} = l_{23} = l_{12} = l_{01}; \quad l_{02} = \frac{a}{2}. \quad (22.3)$$

На основании годографа скоростей (рис. 22.2), получаем:

$$\dot{u}_{01} = \frac{\dot{u}_{05}}{\sin \alpha}; \quad \dot{u}_{02} = \dot{u}_{01} \cdot 2 \cos \alpha = \dot{u}_{05} \frac{2 \cos \alpha}{\sin \alpha}; \quad \dot{u}_{12} = \dot{u}_{23} = \dot{u}_{01} = \frac{\dot{u}_{05}}{\sin \alpha}. \quad (22.4)$$

Подставляя (22.3) и (22.4) в (22.2), получим:

$$p = \frac{\sigma_s^*}{\dot{u}_0 \cdot a} \left\{ \frac{a}{4 \sin \alpha \cdot \cos \alpha} + \frac{2 \cos \alpha}{\sin \alpha} \cdot \frac{a}{2} + \frac{a}{4 \sin \alpha \cdot \cos \alpha} + \frac{a}{4 \sin \alpha \cdot \cos \alpha} + \frac{a}{4 \sin \alpha \cdot \cos \alpha} \right\} \dot{u}_0 =$$

$$= \sigma_s^* \left\{ \frac{1}{\sin \alpha \cdot \cos \alpha} + \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} \right\} = \sigma_s^* \frac{1}{\sin \alpha} \left(\frac{1}{\cos \alpha} + \cos \alpha \right) = p. \quad (22.5)$$

Так как изначально угол α не был задан, то, если как в методе линий скольжения, взять $\alpha = \frac{\pi}{4}$, получим:

$$p = \sigma_s^* \sqrt{2} \left(\sqrt{2} + \frac{1}{\sqrt{2}} \right) = \sigma_s^* \cdot 3. \quad (22.6)$$

Значение удельного усилия (22.6) получено при нестрогом допущении. Правильным будет то значение α , которое доставляет минимум функции $p(\alpha)$; для его определения нужно приравнять производную от $p(\alpha)$ нулю.

$$-\frac{\cos \alpha}{\sin^2 \alpha} \left(\frac{1}{\cos \alpha} + \cos \alpha \right) + \frac{1}{\sin \alpha} \left(\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} - \sin \alpha \right) = 0.$$

Элементарные преобразования в последнем уравнении и его последующее решение приводят к искомому результату:

$$1 - 2 \cos^2 \alpha + \cos^4 \alpha - \cos^2 \alpha - \cos^4 \alpha = 0; \quad \cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{3}}; \quad \alpha \approx 55^\circ.$$

Подстановка найденного значения угла в решение (22.5) дает:

$$p = \sigma_s^* \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{1}{3}}} \left(\frac{1}{\sqrt{3}} + \sqrt{3} \right) = \frac{4\sigma_s^*}{\sqrt{2}}. \quad (22.7)$$

Полученное значение p превышает на 10 % значение давления, которое получается при использовании метода линий скольжения.

3. Метод сопротивления пластическим деформациям (СПДМ) предложен Г. А. Смирновым – Аляевым. Метод предполагает предварительное определение деформаций и позволяет определять напряжения, если задано среднее напряжение или напряжения на границах. При этом предполагается монотонность деформации, а направления главных напряжений и главных деформаций считаются известными. Для определения НДС исходят из следующего:

1. Диаграммы Мора для деформированного и напряженного состояния считаются совпадающими:

$$v_\sigma = \left(\sigma_2 - \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2} \right) / \left(\frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \right) = v_\varepsilon = \frac{2\varepsilon_2 - \varepsilon_1 - \varepsilon_3}{\varepsilon_1 - \varepsilon_3}. \quad (22.8)$$

2. Условие пластичности берут приближенным:

$$\sigma_1 - \sigma_3 = \pm \beta \cdot \sigma_s = \pm \frac{2}{\sqrt{3 + v_\sigma^2}} \sigma_s. \quad (22.9)$$

3. Среднее напряжение или напряжения на границах считаются заданными:

$$\frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3} = \sigma_{cp}. \quad (22.10)$$

Если деформации определены экспериментально, то можно подсчитать фактор Лоде, подставить его значение в (22.8), а потом в (22.9). В результате получаем систему трех алгебраических уравнений (22.8) – (22.10), откуда и определяем искомые значения напряжений.

В СПДМ разработана специальная процедура для вычисления деформаций, которая может быть представлена в виде следующего упрощенного алгоритма:

1. Создание равноосной структуры с относительно мелким зерном.
2. Установление базовой длины l_0 путем замера по различным направлениям 15 зерен и последующего усреднения (рис. 22.3а).
3. Деформирование заготовки.
4. Выделение преимущественных направлений.
5. Измерение конечной длины l , на которой укладываются 15 деформированных зерен вдоль каждого из выбранных направлений.
6. Вычисление деформаций.

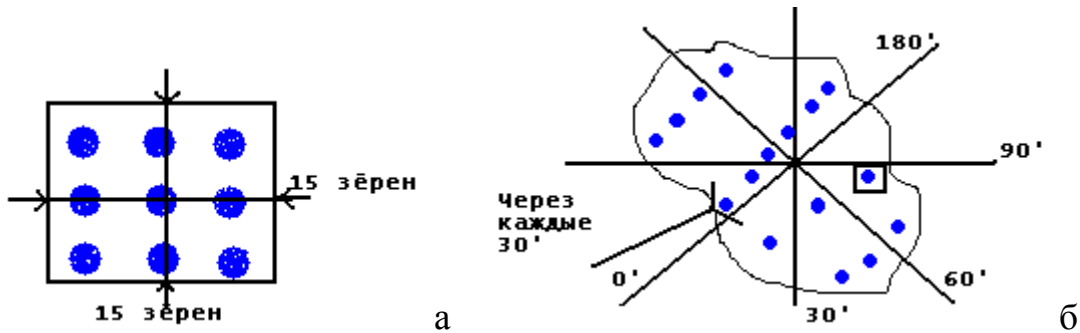


Рис. 22.3. Проведение замеров для определения деформаций:
 а – замер характерного параметра исходной заготовки; б – замер
 характерного параметра заготовки после деформации

Приведенный алгоритм в действительности предполагает значительный объем работ, включая изготовление образцов и микрошлифов, их фотографирование, снятие замеров (см. рис. 22.3б), статистическую обработку. Это повышает точность и объективность результатов.

Контрольные вопросы и упражнения

1. Для исследования каких процессов пригоден метод верхней оценки?
2. Какие параметры позволяет определять данный метод?
3. В чем состоит суть метода?
4. Что представляют собой блоки, на которые разбивается заготовка?
5. Как выбираются размеры блоков и внутренние углы в них?
6. Как задают касательные напряжения на границах блоков?
7. Запишите формулу определения мгновенной мощности внутренних сил.
8. Выполните эскиз разбиения заготовки на блоки.
9. Как определяется мгновенная мощность на пуансоне?
10. Запишите формулу определения суммарного усилия на пуансоне.
11. Что такое годограф? Изобразите его для случая вдавливания пуансона в полупространство.
12. Укажите грани, где имеются разрывы скоростей и где отсутствуют их нормальные составляющие.
13. Выразите значения длин ребер блоков.
14. Выразите скорости относительного движения блоков через скорость пуансона.
15. Найдите удельное усилие как функцию внутреннего угла блока.
16. Проведите минимизацию удельного усилия.
17. Произведите вычисления удельного усилия для углов 45 и 55 градусов.
18. Как отличаются полученные результаты от решения по МЛС?
19. Какие предположения лежат в основе метода СПДМ и какие параметры позволяет определять этот метод?

20. Запишите условие совпадения факторов Лодэ для напряжений и деформаций через их значения.
21. В каком виде используют в методе СПДМ условие пластичности?
22. Какие величины задают в методе СПДМ на границе?
23. Приведите алгоритм определения деформаций в методе СПДМ.
24. Чем обеспечивается точность определения деформаций?

Лекция 23. Метод баланса работ

1. Метод баланса работ. 2. Горячая осадка цилиндрической заготовки. 3. Понятие о вариационных методах. 4. Метод конечных элементов.

1. Метод баланса работ, называемый иногда энергетическим методом, основан на предположении, что работа внешних сил за вычетом потерь на трение должна соответствовать работе сил деформирования $A_{\text{деф}}$:

$$A_{\text{деф}} = A_n - A_{\text{тр}}, \quad (23.1)$$

где A_n – полная работа; $A_{\text{тр}}$ – работа, идущая на преодоление трения.

$$A_n = \sum_i \vec{F}_i \vec{U}_i = \sum_i (F_{i1} U_{i1} + F_{i2} U_{i2} + F_{i3} U_{i3}) \Rightarrow \iint_{(A)} \vec{F}_i \vec{U}_i dA. \quad (23.2)$$

Задача заключается в определении работы сил деформирования $A_{\text{деф}}$.

В теории упругой деформации:

$$A_{\text{деф}} = \int_{(V)} \frac{1}{2} \cdot \varepsilon_i \cdot \sigma_i \cdot dV, \quad (23.3)$$

где ε_i , σ_i – интенсивность деформаций и напряжений соответственно.

Физические уравнения для пластической области имеют вид

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{E'} \left[\sigma_1 - \frac{1}{2} \cdot (\sigma_2 + \sigma_3) \right]; \quad \varepsilon_2 = \frac{1}{E'} \left[\sigma_2 - \frac{1}{2} \cdot (\sigma_1 + \sigma_3) \right]; \quad \varepsilon_3 = \frac{1}{E'} \left[\sigma_3 - \frac{1}{2} \cdot (\sigma_1 + \sigma_2) \right].$$

В отличие от (23.3) в пластической области для работы сил деформирования осреднение по напряжениям производить не следует, поэтому:

$$\begin{aligned} A_{\text{деф}} &= \iiint_{(V)} (\varepsilon_1 \cdot \sigma_1 + \varepsilon_2 \cdot \sigma_2 + \varepsilon_3 \cdot \sigma_3) dV = \\ &= \iiint_{(V)} \frac{1}{E'} \left\{ \sigma_1^2 - \frac{1}{2} \cdot \sigma_1 \sigma_2 - \frac{1}{2} \cdot \sigma_1 \sigma_3 + \sigma_2^2 - \frac{1}{2} \cdot \sigma_2 \sigma_1 - \frac{1}{2} \cdot \sigma_2 \sigma_3 + \right. \\ &\quad \left. + \sigma_3^2 - \frac{1}{2} \cdot \sigma_3 \sigma_1 - \frac{1}{2} \cdot \sigma_3 \sigma_2 \right\} dV = \\ &= \iiint_{(V)} \frac{1}{2E'} \{ \sigma_1^2 - 2 \cdot \sigma_1 \sigma_2 + \sigma_2^2 + \sigma_1^2 - 2 \cdot \sigma_1 \sigma_3 + \sigma_3^2 + \sigma_2^2 - 2 \cdot \sigma_2 \sigma_3 + \sigma_3^2 \} dV = \\ &= \iiint_{(V)} \frac{1}{E'} \cdot \frac{1}{2} \{ (\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 \} dV = \iiint_{(V)} \frac{\sigma_i^2 \cdot \varepsilon_i}{\sigma_i} dV = \iiint_{(V)} \varepsilon_i \sigma_i dV. \quad (23.4) \end{aligned}$$

В преобразованиях (23.4) мы воспользовались определением интенсивности напряжений. Используя условие пластичности, из (23.4) и (23.1) найдем полную работу деформации:

$$A_n = A_{тр} + \sigma_s \iiint_{(V)} \varepsilon_i dV. \quad (23.5)$$

Внося в (23.4) значение полной работы и работы сил трения, можно получить **удельное усилие деформирования**, если форма и размеры деформируемого тела известны заранее.

Данный метод может быть использован для определения деформирующих усилий при процессах **осадки,ковки и объемной горячей штамповки**. Он не позволяет находить распределение полей напряжений и деформаций.

2. В качестве применения метода баланса работ рассмотрим задачу **осадки цилиндрической заготовки** с размерами, указанными на рис. 23.1. Осадка осуществляется на величину Δh . Вычислить удельное усилие. Механические характеристики заготовки считаются известными.

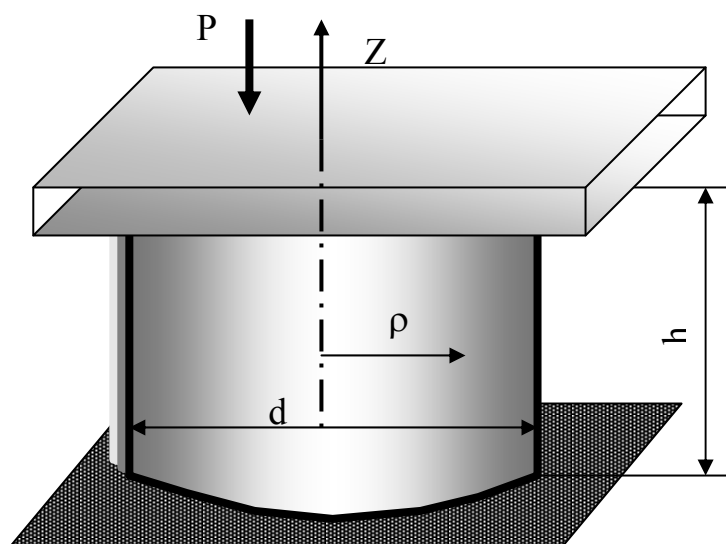


Рис. 23.1. Осадка цилиндрической заготовки

Полная работа может быть вычислена по формуле

$$A_n = P \cdot \Delta h, \quad (23.6)$$

где P – суммарное усилие; Δh – перемещение инструмента.

В формуле (23.2) принято: $P = F_i$; $\Delta h = u_i$. Вычислим значения $A_{тр}$ и $A_{деф}$. Работа сил трения на каждом из торцов заготовки определяется формулой

$$A_{тр} = - \iint_{(A)} \tau_k \cdot u_\rho dA, \quad (23.7)$$

где u_ρ – радиальные перемещения; τ_k – касательные напряжения на контактной поверхности.

Знак «-» в формуле (23.7) в силу того, что силы трения препятствуют перемещению материала заготовки. Работу сил деформирования определяем в соответствии с (23.4) по формуле

$$A_{деф} = \sigma_s \iiint_{(V)} \varepsilon_i dV, \quad (23.8)$$

где ε_i – интенсивность деформаций.

Для интегрирования (23.8) вычислим предварительно элемент объема в цилиндрической системе координат:

$$dV = dA \cdot dz; \quad dA = \rho \cdot d\theta \cdot d\rho. \quad (23.9)$$

Деформации в продольном, радиальном и окружном направлениях даются формулами:

$$\varepsilon_z = -\frac{\Delta h}{h}; \quad \varepsilon_\rho = \frac{\partial U_\rho}{\partial \rho}; \quad \varepsilon_\theta = \frac{U_\rho}{\rho}. \quad (23.10)$$

Воспользовавшись условием несжимаемости $\varepsilon_\rho + \varepsilon_\theta + \varepsilon_z = 0$, получаем:

$$\frac{\partial U_\rho}{\partial \rho} + \frac{U_\rho}{\rho} + \varepsilon_z = 0, \quad \text{или} \quad \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho U_\rho) = \frac{U_\rho}{\rho} + \frac{\partial U_\rho}{\partial \rho} = \frac{\Delta h}{h}. \quad (23.11)$$

Дифференциальное уравнение (23.11) не включает окружную координату ввиду осевой симметрии задачи, следовательно, константа интегрирования может зависеть только от продольной координаты:

$$\rho U_\rho = \frac{\Delta h}{h} \cdot \frac{\rho^2}{2} + f(z). \quad (23.12)$$

Функциональную «константу» интегрирования $f(z)$ можно определить из следующих соображений. На оси симметрии заготовки левая часть уравнения (23.12) и первый член правой части обращаются в нуль, следовательно, $f(z) \equiv 0$, т. е. от координаты z ничего не зависит.

Из уравнения (23.12) получаем **радиальное перемещение**:

$$U_\rho = \frac{1}{2} \cdot \frac{\Delta h}{h} \rho. \quad (23.13)$$

На основании формул (23.10) вычислим деформации:

$$\varepsilon_\rho = \frac{\partial U_\rho}{\partial \rho} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\Delta h}{h}; \quad \varepsilon_\theta = \frac{U_\rho}{\rho} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\Delta h}{h}; \quad \varepsilon_z = -\frac{\Delta h}{h}. \quad (23.14)$$

Найдем также **интенсивность деформаций**:

$$\varepsilon_i = \frac{\sqrt{2}}{3} \sqrt{(\varepsilon_\rho - \varepsilon_\theta)^2 + (\varepsilon_\rho - \varepsilon_z)^2 + (\varepsilon_\theta - \varepsilon_z)^2} = \frac{\sqrt{2}}{3} \sqrt{2 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^2 \left(\frac{\Delta h}{h}\right)^2} = \pm \frac{\Delta h}{h}. \quad (23.15)$$

В (23.15) следует взять знак «-», поскольку основной деформацией является деформация сжатия, следовательно, $\varepsilon_i = -\frac{\Delta h}{h}$.

С учетом (23.15) можно вычислить **работу сил деформирования** в соответствии с формулой (23.8):

$$A_{\text{деф}} = \sigma_s \iiint_{(V)} \varepsilon_i dV = -\sigma_s \frac{\Delta h}{h} \int_0^d \int_0^{2\pi} \int_0^h \rho d\rho d\theta dz = -\sigma_s \frac{\Delta h}{h} \cdot \frac{2\pi}{2} \cdot \frac{d^2}{4} \cdot h = -\sigma_s \Delta h \frac{\pi d^2}{4}. \quad (23.16)$$

Работа сил трения на верхнем и нижнем основаниях вычисляется простым интегрированием (23.7):

$$A_{\text{тр}} = -2\tau_k \int_0^{\frac{d}{2}} \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} \cdot \frac{\Delta h}{h} \rho^2 d\rho d\theta = -\frac{2\pi \cdot \tau_k \cdot \Delta h \cdot d^3}{24h} = -\frac{\tau_k \cdot \Delta h \cdot d}{3h} \cdot \frac{\pi d^2}{4}. \quad (23.17)$$

Полная работа деформации, в силу (23.6), с учетом формул (23.16) и (23.17) определяется соотношением:

$$A_n = P\Delta h = -\frac{\sigma_s \cdot \Delta h \cdot \pi \cdot d^2}{4} - \frac{\tau_k \cdot \Delta h \cdot d}{3h} \cdot \frac{\pi d^2}{4}. \quad (23.18)$$

Из (23.18) легко получить **полное усилие осадки**:

$$P = -\frac{\pi d^2}{4} \left\{ \sigma_s + \frac{\tau_k d}{3h} \right\}, \quad (23.19)$$

а также удельное усилие осадки (**формула Зибеля**):

$$p = \frac{P}{A} = -\left(\sigma_s + \frac{\tau_k \cdot d}{3 \cdot h} \right). \quad (23.20)$$

В формуле (23.20) значение касательного напряжения существенно зависит от условий контакта инструмента и заготовки.

3. Вариационные методы определения усилий и деформаций, как и метод баланса работ, основаны на энергетическом принципе, но в отличие от метода верхней оценки и метода баланса работ позволяют определять не только полное и удельное усилия, но и распределение напряжений и деформаций по объему тела, а также форму тела после деформации с учетом неравномерности деформации. Вариационные методы основаны на положении: «сумма работ всех внешних и внутренних сил на возможных перемещениях около состояния равновесия равна нулю».

Вариации работы внешних сил на возможных перемещениях определяются уравнением

$$\delta A_B = \iint_a (X\delta u + Y\delta v + Z\delta w) da = \delta \iint_a (Xu + Yv + Zw) da.$$

Вариации работы внутренних сил на возможных перемещениях определяются уравнением

$$\delta A_D = k \iiint_V d\varepsilon_i dV = k\delta \iiint_V \varepsilon_i dV.$$

В соответствии с принципом возможных перемещений, учитывая, что работа внутренних сил положительна, а внешних – отрицательна, имеем:

$$k \iiint_V \delta \varepsilon_i dV - \iint_a (X\delta u + Y\delta v + Z\delta w) da = \delta \left[k \iiint_V \varepsilon_i dV - \iint_a (Xu + Yv + Zw) da \right] = 0.$$

Величина, стоящая в квадратных скобках, представляет собой полную энергию деформирования. Следовательно, вариация полной энергии равна нулю. Это положение можно сформулировать так: «действительная форма равновесия тела отличается от всех возможных форм тем, что сообщает полной энергии минимальное значение». Таким образом, задача может быть поставлена так: **найти такую функциональную зависимость перемещений от координат, при которой полная энергия принимает минимальное значение.**

Решение практических задач обработки металлов давлением методом вариационного исчисления представляет значительные математические трудности. Применением приближенных, так называемых «прямых», методов вариационного исчисления удается решить большое число задач. Один из прямых методов (метод Ритца) заключается в том, что искомую функцию (применительно к обработке давлением этой функцией являются перемещения) представляют в виде ряда, например,

$$u = a_1\varphi_1(x, y, z) + a_2\varphi_2(x, y, z) + \dots,$$

где a_1, a_2, \dots , – неопределенные параметры; $\varphi_1(x, y, z), \varphi_2(x, y, z), \dots$ – функции координат, отвечающие граничным условиям.

Функции φ_i можно принимать произвольно, лишь бы они отвечали граничным условиям.

В настоящее время вариационные методы используются большей частью при реализации их численных алгоритмов на ЭВМ (из-за значительной трудоемкости вычислений).

4. Метод конечных элементов впервые был применен Маркалом П. и Кингом И. для решения упруго-пластических задач. Учет контактных взаимодействий заготовки и инструмента учитывается с использованием различных моделей. **Суть метода** заключается в разбиении тела на отдельные элементы, соединенные в узловых точках. Для каждого элемента решается полная система матричных уравнений механики сплошных сред, опосредованная нелинейным функционалом, для которого одним из методов оптимизации (линейное программирование, метод штрафных функций) отыскиваются решения, приводящие невязку к нулю. Метод позволяет получать **все характеристики** напряженно-деформированного состояния, границы упругой и пластической областей, перемещения и т. д. Метод удовлетворительно работает при решении задач пластического формоизменения осесимметричных заготовок и плоских задач. Решение задач в пространственной постановке (особенно при значительных размерах заготовки и при больших конечных деформациях) может приводить процесс вычисления к расходимости. Реализуется метод на мощных ЭВМ, обладающих значительным быстродействием и ресурсами памяти. Впрочем, на персональных компьютерах МКЭ реализован широко известной программой Ansys 7.1, включающей модуль решения задач контактного, пластического и ударного взаимодействия твердых тел LS – Dyna.

Контрольные вопросы и упражнения

1. На каком предположении основан метод баланса работ?
2. Как в общем виде определяется полная деформация заготовки?
3. Запишите физические уравнения для пластической области.
4. Как в общем виде определяется работа деформации для упругой и для пластической областей?

5. Произведите вычисления работы деформации в пластической области с учетом физических уравнений и интенсивности напряжений.
6. Для определения каких величин и в каких процессах может быть использован метод баланса работ?
7. Выполните эскиз для процесса осадки цилиндрической заготовки.
8. Как формулируется постановка задачи для процесса осадки цилиндрической заготовки?
9. Запишите формулу определения полной работы деформирования.
10. Как определяется работа сил трения на одном из торцов цилиндрической заготовки?
11. Запишите формулу элементарного объема в цилиндрической системе координат.
12. Дайте определение трех главных деформаций в цилиндрической системе координат через соответствующие перемещения.
13. Запишите условие несжимаемости и получите из него дифференциальное уравнение для определения радиального перемещения.
14. Проинтегрируйте дифференциальное уравнение и определите радиальное перемещение.
15. Получите аналитические выражения главных деформаций, используя формулу радиального перемещения.
16. Вычислите интенсивность деформаций.
17. Произведите интегрирование в правой части формулы для определения работы сил деформирования.
18. Произведите интегрирование в правой части формулы для определения работы сил трения.
19. Вычислите полное усилие осадки.
20. Получите формулу Зибеля, поясните значения входящих величин.
21. На каком принципе основаны вариационные методы?
22. Какие параметры могут быть получены в результате решения вариационной задачи?
23. Запишите формулу вариации работы внешних сил.
24. Запишите вариации работы внутренних сил.
25. Как определяется вариация полной энергии деформирования?
26. Как формулируется постановка вариационной задачи?
27. В чем состоит идея метода Ритца?
28. Каким условиям должны удовлетворять пробные функции в методе Ритца?
29. В чем состоит суть метода конечных элементов?
30. Какие характеристики процесса формообразования можно получить в результате решения соответствующей задачи методом конечных элементов?
31. Какие классы задач достаточно хорошо решаются МКЭ, а какие – нет?
32. В какой из известных программ расчетов пластического формоизменения реализован метод конечных элементов?

Раздел 11. ОПЕРАЦИИ ОБРАБОТКИ МЕТАЛЛОВ ДАВЛЕНИЕМ

Лекция 24. Осадка прямоугольной полосы

- =====
1. Общая характеристика задачи и упрощение уравнений равновесия.
 2. Влияние контактного трения. 3. Эпюра контактных напряжений.
- =====

1. Осадкой называют технологическую операцию, при помощи которой уменьшают высоту исходной заготовки с одновременным увеличением ее размеров поперечного сечения в перпендикулярном к действующей силе направлении (рис. 24.1). Если в одном направлении размер заготовки существенно больше других ее размеров, то можно приближенно принять схему плоского деформированного состояния (применительно к рис. 24.1 $\varepsilon_2 = 0$).

Рассмотрим полосу ограниченной ширины и высоты, подверженную осадке. В направлении координаты x_2 длину полосы будем считать бесконечной, т. е. принимается **схема плоской деформации**, при этом напряжения будем считать **независимыми от**

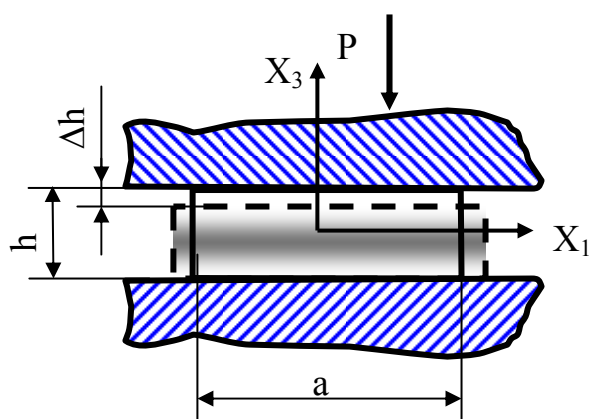


Рис. 24.1. Осадка длинной полосы

этой координаты. Будем полагать также, что **сечения в плоскостях, нормальных к оси x_2 , не претерпевают искажений.** Последние два предположения резюмируются в следующих формулах:

$$\begin{aligned} \sigma_{ij} &= f(x_2); \\ \sigma_{12} = \sigma_{21} = \sigma_{23} = \sigma_{32} &= 0. \end{aligned} \quad (24.1)$$

Направления X_1 и X_2 можно считать главными, поэтому с учетом формул (24.1) уравнения равновесия примут вид

$$\frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{13}}{\partial x_3} = 0; \quad \frac{\partial \sigma_{31}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{33}}{\partial x_3} = 0. \quad (24.2)$$

Продифференцируем данные уравнения по $\frac{\partial}{\partial x_1}$ (первое), по $\frac{\partial}{\partial x_3}$ (второе) и вычтем из первого второе.

$$\frac{\partial^2 (\sigma_{11} - \sigma_{33})}{\partial x_1 \partial x_3} + \frac{\partial^2 \sigma_{13}}{\partial x_3^2} + \frac{\partial^2 \sigma_{31}}{\partial x_1^2} = 0. \quad (24.3)$$

Запишем условие пластичности для плоского деформированного состояния:

$$(\sigma_{11} - \sigma_{33})^2 - 4\sigma_{13}^2 = 4k^2; \quad \text{или} \quad \sigma_{11} - \sigma_{33} = \pm 2\sqrt{k^2 - \sigma_{13}^2}. \quad (24.4)$$

Во втором уравнении (24.4) следует взять знак «+», поскольку $\sigma_{33} < 0$, а $|\sigma_{33}| > |\sigma_{11}|$. Подстановка второго соотношения (24.4) в (24.3) дает:

$$\frac{\partial^2 2\sqrt{k^2 - \sigma_{13}^2}}{\partial \mathbf{x}_1 \partial \mathbf{x}_3} + \frac{\partial^2 \sigma_{13}}{\partial \mathbf{x}_3^2} + \frac{\partial^2 \sigma_{31}}{\partial \mathbf{x}_1^2} = 0. \quad (24.5)$$

Для разрешимости уравнения (24.5) сделаем предположение, что $\sigma_{31} \neq \sigma_{31}(\mathbf{x}_1)$.

Тогда из (24.5) следует:

$$\frac{\partial^2 \sigma_{13}}{\partial \mathbf{x}_3^2} = 0. \quad (24.6)$$

Интегрирование (24.6) с учетом того, что в нейтральной плоскости, содержащей начало системы координат, касательные напряжения отсутствуют, а на границе с инструментом они равны касательным напряжениям τ_k , дает возможность определить касательные напряжения в произвольной точке деформируемого тела:

$$\sigma_{13}(\mathbf{x}) = \mathbf{C}_1 + \mathbf{C}_2 \cdot \mathbf{x}_3; \quad \sigma_{13}(\mathbf{x}_3 = 0) = 0 \Rightarrow \mathbf{C}_1 = 0; \quad \sigma_{13}\left(\mathbf{x}_3 = \frac{\mathbf{h}}{2}\right) = \tau_k = \mathbf{C}_2 = \frac{2\tau_k}{\mathbf{h}}; \quad (24.7)$$

$$\sigma_{13}(\mathbf{x}_3) = \frac{2\tau_k}{\mathbf{h}} \cdot \mathbf{x}_3.$$

Уравнения равновесия (24.2) с учетом (24.1) и (24.7) примут вид

$$\frac{\partial \sigma_{11}}{\partial \mathbf{x}_1} + \frac{2\tau_k}{\mathbf{h}} = 0; \quad \frac{\partial \sigma_{33}}{\partial \mathbf{x}_3} = 0. \quad (24.8)$$

Интегрирование уравнений (24.8) дает:

$$\sigma_{11}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_3) = -\frac{2\tau_k}{\mathbf{h}} \cdot \mathbf{x}_1 + \varphi_1(\mathbf{x}_3); \quad \sigma_{33}(\mathbf{x}_1) = \varphi_2(\mathbf{x}_1). \quad (24.9)$$

Подставим полученные значения σ_{11} , σ_{13} и σ_{33} из соотношений (24.8), (24.9) в условие пластичности (24.4):

$$-\frac{2\tau_k}{\mathbf{h}} \cdot \mathbf{x}_1 + \varphi_1(\mathbf{x}_3) - \varphi_2(\mathbf{x}_1) = 2\sqrt{k^2 - \left(\frac{2\tau_k}{\mathbf{h}} \cdot \mathbf{x}_3\right)^2}. \quad (24.10)$$

Перенесем в (24.10) члены, содержащие \mathbf{x}_1 в одну сторону, а члены, содержащие \mathbf{x}_3 , в другую, приравняв их некоторой константе С:

$$-\frac{2\tau_k}{\mathbf{h}} \cdot \mathbf{x}_1 - \varphi_2(\mathbf{x}_1) = 2\sqrt{k^2 - \left(\frac{2\tau_k}{\mathbf{h}} \cdot \mathbf{x}_3\right)^2} - \varphi_1(\mathbf{x}_3) = -\mathbf{C}. \quad (24.11)$$

Приравнивание значений функций от разных переменных обусловлено тем, что значения этих функций совпадают лишь в случае, если их значения во всем диапазоне переменных являются константами. Из (24.11) определяются неизвестные функции, входящие в формулы (24.9):

$$\varphi_2(\mathbf{x}_1) = -\frac{2 \cdot \tau_k \cdot \mathbf{x}_1}{\mathbf{h}} + \mathbf{C}; \quad \varphi_1(\mathbf{x}_3) = 2 \cdot \sqrt{k^2 - \left(\frac{2 \cdot \tau_k}{\mathbf{h}} \cdot \mathbf{x}_3\right)^2} + \mathbf{C}. \quad (24.12)$$

С учетом (24.12) формулы (24.7) и (24.9) приобретут вид

$$\sigma_{11} = -\frac{2\tau_k}{h} \cdot x_1 + 2\sqrt{k^2 - \left(\frac{2\tau_k}{h} \cdot x_3\right)^2} + C; \quad (24.13)$$

$$\sigma_{13} = \frac{2\tau_k}{h} \cdot x_3; \quad \sigma_{33} = -\frac{2\tau_k}{h} \cdot x_1 + C. \quad (24.14)$$

Решения (24.13) и (24.14) справедливы лишь на значительном удалении от свободных поверхностей.

2. Отметим, что **в отсутствие сил трения** на контактной поверхности ($\tau_k = 0$) полученные решения **не являются противоречивыми**, что устанавливается проверкой значений напряжений на границах. **При наличии трения** в контактной области решения (24.13) и (24.14) приводят к **противоречию** в угловых точках заготовки. На свободной границе при $x_1 = a/2$ напряжение σ_{11} должно быть равным нулю, в том числе и в угловых нижней и верхней точках, следовательно,

$$\sigma_{11}\left(x_1 = \frac{a}{2}, x_3 = \frac{h}{2}\right) = 0 = -\frac{2\tau_k}{h} \cdot \frac{a}{2} + 2\sqrt{k^2 - \left(\frac{2\tau_k}{h} \cdot \frac{h}{2}\right)^2} + C,$$

откуда

$$C = \frac{\tau_k}{h} \cdot a - 2\sqrt{k^2 - \tau_k^2}.$$

Данное значение C подставим в σ_{33} :

$$\sigma_{33}\left(x_1 = \frac{a}{2}\right) = -\frac{\tau_k}{h} \cdot \frac{a}{2} + \frac{\tau_k}{h} \cdot a - 2\sqrt{k^2 - \tau_k^2}.$$

Положим, что в крайней точке с координатами $x_1 = \frac{a}{2}$ и $x_3 = \frac{h}{2}$ контактные касательные напряжения максимальны. При наличии сил трения такое предположение является разумным, тогда

$$\tau_k = k \Rightarrow \sigma_{33}\left(x_1 = \frac{a}{2}\right) = 0,$$

что приводит к противоречию: в крайних точках нормальное напряжение должно быть близко к пределу текучести, а никак не нулевым. Выявленное противоречие проистекает из-за допущений, связанных с разрешимостью уравнений (24.11). Для снятия противоречия примем, что

$$\sigma_{33}\left(x_1 = \frac{a}{2}\right) = -\sigma_s^*. \quad (24.15)$$

Подстановка (24.15) во второе уравнение (24.14) позволяет определить константу C и получить распределение контактных напряжений по поверхности инструмента:

$$\begin{aligned} -\frac{2\tau_k}{h} \cdot \frac{a}{2} + C &= -\sigma_s^*; \quad C = -\sigma_s^* + \frac{2\tau_k}{h} \cdot a. \\ \sigma_{33} &= -\frac{2\tau_k}{h} \cdot x_1 + \frac{\tau_k}{h} \cdot a - \sigma_s^* = -\sigma_s^* + \frac{\tau_k}{h} (a - 2x_1). \end{aligned} \quad (24.16)$$

3. Возьмем закон трения на границе в следующем виде:

$$\tau_k = -f \cdot \sigma_s^*.$$

Тогда формула (24.16) принимает вид

$$\sigma_{33} = -\sigma_s^* \left[1 + \frac{f(a - 2x_1)}{h} \right]. \quad (24.17)$$

Формула давления на инструмент и максимального давления имеют вид:

$$|p| = \sigma_s^* \left[1 + \frac{f(a - 2x_1)}{h} \right]; \quad p_{\max} = \sigma_s^* \left[1 + \frac{f \cdot a}{h} \right]. \quad (24.18)$$

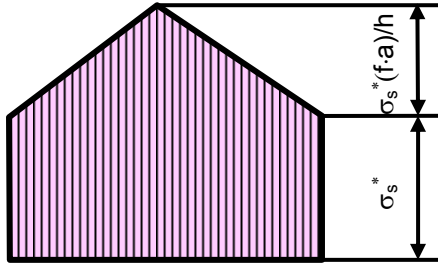


Рис. 24.2. Эпюра распределения давлений на инструмент

Для определения полного усилия нет нужды интегрировать давление (24.18). Контактные давления (24.18) распределяются по линейному закону (рис. 24.2), на основе которых можно подсчитать требуемое усилие деформирования заготовки путем умножения площади эпюры на длину заготовки вдоль оси x_2 .

Контрольные вопросы и упражнения

1. Какая операция ОМД называется осадкой?
2. Выполните эскиз осадки длинной полосы на плоских бойках.
3. При каких условиях схему НДС можно считать плоской?
4. Какие три основных допущения принимаются при рассмотрении процесса осадки длинной полосы?
5. Какое из допущений позволяет считать напряжения независимыми от одной из координат?
6. Какое допущение позволяет считать ряд касательных напряжений нулевыми? Изобразите направления этих напряжений и их незначительность.
7. Какой вид принимают уравнения равновесия вследствие принятых допущений?
8. Как из уравнений равновесия получить уравнение относительного ненулевого касательного напряжения?
9. Запишите условие пластичности для плоского деформированного состояния и найдите из него разность напряжений с одноименными индексами.
10. Какими соображениями обусловлен знак в правой части условия пластичности, разрешенного относительно разности напряжений с одноименными индексами?
11. Сделайте вывод дифференциального уравнения второго порядка относительно касательного напряжения.
12. При каком допущении возможна разрешимость дифференциального уравнения относительного касательного напряжения?

13. Выполните интегрирование упрощенного дифференциального уравнения относительно касательного напряжения.
14. Сформулируйте граничные условия для касательного напряжения, полученного в результате интегрирования соответствующего дифференциального уравнения.
15. Сделайте вывод зависимости касательного напряжения от координат с учетом граничных условий.
16. Запишите уравнения равновесия после подстановки в них значения касательного напряжения.
17. Проинтегрируйте уравнения равновесия после представления в них касательного напряжения в явном виде.
18. Произведите вывод разрешающего уравнения с двумя неизвестными функциями, используя условие пластичности.
19. При каком условии справедливо разрешающее уравнение, левая и правая части которого зависят от разных координат?
20. Сделайте вывод напряжений, производя замену неизвестных функций соответствующими выражениями, содержащими одну неизвестную константу.
21. В какой области справедливы решения для напряжений?
22. Проверив значения напряжений на границах, покажите, что никаких противоречий в значениях напряжений не наблюдается.
23. Покажите возникающее противоречие в полученных решениях при наличии трения на контактных поверхностях.
24. Каким образом снимается противоречие в данном решении?
25. Сделайте вывод формулы нормального напряжения по снятию противоречия.
26. Запишите закон трения на границе.
27. Запишите формулу распределения давления по поверхности инструмента.
28. Изобразите эпюру контактных давлений на инструменте. Как по эпюре давлений можно найти потребное усилие осадки?

Лекция 25. Работа при осадке заготовки. Протяжка заготовки. Открытая и закрытая прошивки

=====

1. Работа деформации при осадке призмы и цилиндра. 2. Протяжка заготовки на плоских и фасонных бойках. 3. Прошивка цилиндрической заготовки. 4. Предельные контактные напряжения при открытой и закрытой прошивках.

=====

1. При осадке заготовки **прямоугольной формы** в плане (см. рис. 24.1) работа деформирования A может быть подсчитана элементарно, если не учитывать изменение площади сечения заготовки:

$$\begin{aligned}
 A &= \int_h^{h_0} P \cdot dh = \int_h^{h_0} p_{cp} \cdot A_s \cdot dh = \int_h^{h_0} p_{cp} \cdot \frac{V}{h} dh = \\
 &= p_{cp} \cdot V \cdot \int_h^{h_0} \frac{dh}{h} = p_{cp} \cdot V \cdot \varepsilon_z = p_{cp} \cdot V_{cm},
 \end{aligned}
 \tag{25.1}$$

где h_0, h – исходная и текущая высота заготовки соответственно; p_{cp} – среднее давление; A_s – элемент поверхности; V_{cm} – смещенный объем.

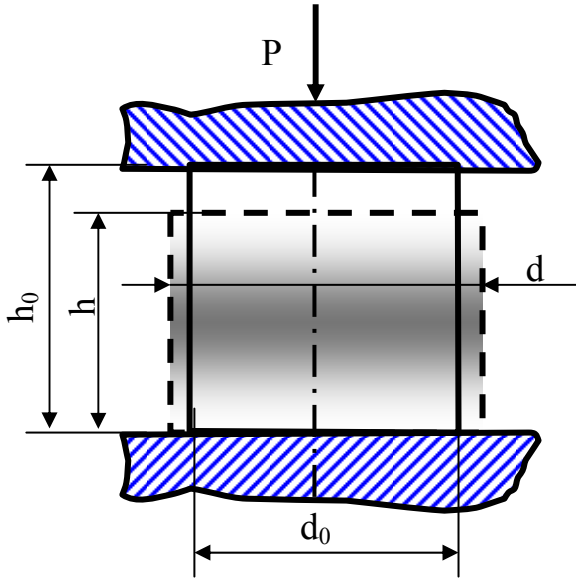


Рис. 25.1. Осадка цилиндрической заготовки

Найдем уточненную работу деформации при осадке **цилиндрической заготовки** (рис. 25. 1), учитывая ее поперечное сечение. Если взять среднее давление, то результат вычисления работы деформирования цилиндрической заготовки не будет отличаться от формулы (25.1), полученной применительно к осадке заготовки, прямоугольной в плане. Для учета распределения давлений и изменения диаметра заготовки в качестве закона распределения напряжений возьмем формулу Зибеля (23.20), в которой контактное касательное напряжение зададим в следующем виде:

$$\tau_k = f \cdot \sigma_s.$$

Тогда удельное усилие можно записать в форме:

$$p = \sigma_s \cdot \left(1 + \frac{f \cdot d}{3 \cdot h} \right). \tag{25.2}$$

Подставим значение удельного усилия из (25.2) в формулу вычисления работы:

$$\begin{aligned}
 A &= \int_h^{h_0} p \cdot A_s \cdot dh = V \cdot \sigma_s \cdot \int_h^{h_0} \left(1 + \frac{f \cdot d}{3 \cdot h} \right) \cdot \frac{dh}{h} = \\
 &= V \cdot \sigma_s \cdot \int_h^{h_0} \left(1 + \frac{f}{3 \cdot h} \cdot \sqrt{\frac{4 \cdot V}{\pi \cdot h}} \right) \cdot \frac{dh}{h} = V \cdot \sigma_s \cdot \left[\ln \frac{h_0}{h} + \frac{f}{3} \cdot \sqrt{\frac{4 \cdot V}{\pi}} \cdot \int_h^{h_0} h^{-\frac{5}{2}} \cdot dh \right] = \\
 &= V \cdot \sigma_s \cdot \left[\ln \frac{h_0}{h} + \frac{2 \cdot f}{3 \cdot 3} \cdot \sqrt{\frac{4 \cdot V}{\pi}} \cdot h^{-\frac{3}{2}} \Big|_h^{h_0} \right] = V \cdot \sigma_s \cdot \left[\ln \frac{h_0}{h} - \frac{2 \cdot f}{9} \sqrt{\frac{4 \cdot V}{\pi}} \cdot \left(\frac{1}{h_0 \cdot \sqrt{h_0}} - \frac{1}{h \cdot \sqrt{h}} \right) \right] = \\
 &= V \cdot \sigma_s \cdot \left[\ln \frac{h_0}{h} - \frac{2 \cdot f}{9} \cdot \left(\frac{d}{h} - \frac{d_0}{h_0} \right) \right].
 \end{aligned}
 \tag{25.3}$$

Окончательно:

$$A = V \cdot \sigma_s \cdot \left\{ \ln \frac{h_0}{h} + \frac{2 \cdot f}{9} \left[\frac{d}{h} - \frac{d_0}{h_0} \right] \right\}. \quad (25.4)$$

Для тел **призматической формы** расчетная формула (25.4) будет также справедлива, поскольку призматическую заготовку можно вписать в цилиндр и рассмотрение производить на этой основе. В случае осадки **длинной прямоугольной полосы**, с учетом формулы (24.18), для работы деформирования получим аналогичное выражение:

$$A = V \cdot \sigma_s^* \cdot \left\{ \ln \frac{h_0}{h} + \frac{2 \cdot f}{8} \left[\frac{d}{h} - \frac{d_0}{h_0} \right] \right\}. \quad (25.5)$$

Легко видеть, что в формулах (25.4) и (25.5) второй член в фигурных скобках отражает действие сил трения. При малых деформациях работу деформации приближенно можно брать в соответствии с формулой (25.1). Формулы (24.4) и (25.5) служат для определения вида оборудования для деформирования (пресс, молот). При расчетах следует также учитывать скоростной фактор и КПД удара, однако эти вопросы рассматриваются в курсах «Кузнечно-штамповочное оборудование» и «Горячая объемная штамповка».

2. Протяжкой называют кузнечную операцию, посредством которой увеличивается длина заготовки за счет уменьшения ее поперечного сечения.

Протяжка осуществляется путем последовательных «обжимов» заготовки с кантовкой ее после каждого обжима (технологического перехода). Протяжка на плоских бойках (рис. 25.2) вызывает неравномерность деформации. Удержание участков, примыкающих к очагу деформации, зависит от отношения l_0/a (величины подачи или ширины бойка к ширине полосы). С уменьшением этого отношения уменьшается и неравномерность деформации, приближаясь к схеме **плоской деформации**, по мере того

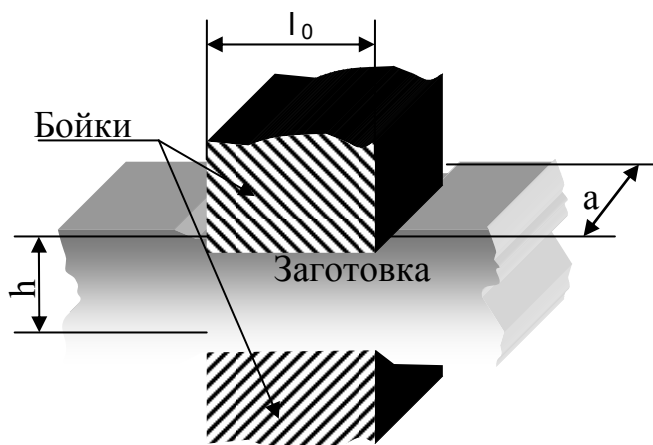


Рис. 25.2. Схема протяжки

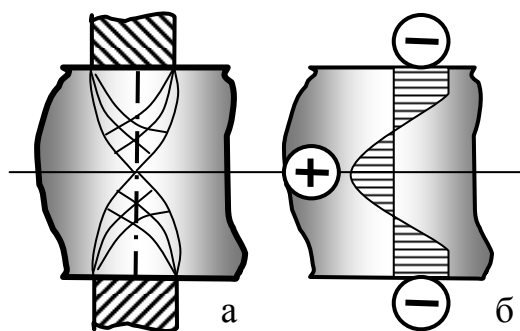


Рис. 25.3. Протяжка в узких бойках: а – схема; б – эпюра напряжений

как входящие в отношение величины становятся соизмеримыми. Для определения удельного усилия деформирования при обжиге, когда $a/h < 2$, можно пользоваться формулой, аналогичной формуле Зибеля:

$$p = \sigma_s^* \cdot \left(1 + \frac{f \cdot l_0}{3 \cdot h} \right). \quad (25.6)$$

Бойки называют **узкими**, если $l_0/h < 1$. В этом случае проработка металла ухудшается, поскольку существенно изменяется характер напряженного состояния (рис. 25.3). Данная задача была решена Хиллом с использованием метода линий скольжения (последние указаны на рис. 25.3-а).

Особенностью данного процесса является то, что в центральной части заготовки имеются растягивающие напряжения в направлении оси, указанной на рис. 25.3-б, причем при $l_0/h = 0,25$ их значения достигают предела текучести материала. При протяжке заготовок из малопластичных материалов растягивающие напряжения могут приводить к образованию трещин. При очень **малых значениях** l_0/h происходит вытеснение металла у краев бойка и врезание его в металл: протяжка превращается в рубку. Во избежание **продольного изгиба** заготовки деформацию по высоте следует задавать такой, чтобы соблюдалось соотношение

$$\varphi_i = a_i/h_i < 2,5, \quad (25.7)$$

φ_i – коэффициент обжима заготовки.

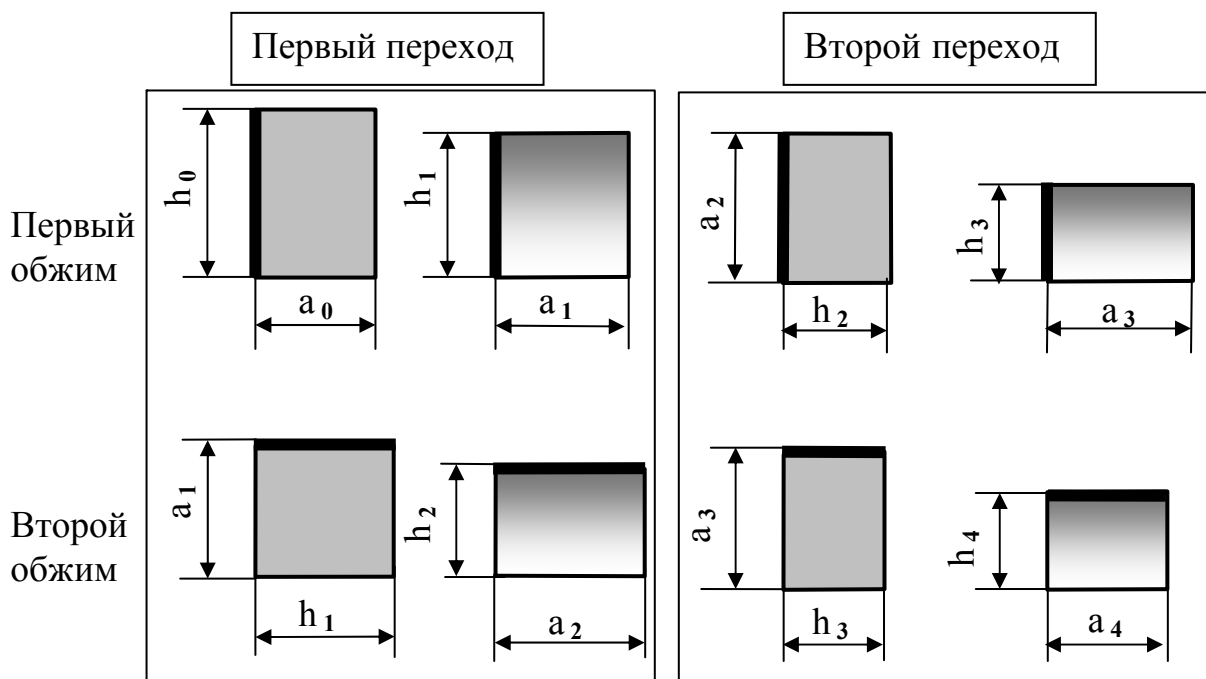


Рис. 25.4. Последовательность обжима заготовки при протяжке

Работу деформирования при протяжке можно определить на основе рис. 25.4, определяющего последовательность операций протяжки. В соответствии с формулой (25.1) суммарная работа определяется следующим образом:

$$A = \sum_{i=1}^n A_i = p_{\text{cp}} \cdot V \cdot \left[\ln\left(\frac{h_0}{h_1}\right) + \ln\left(\frac{a_1}{h_2}\right) + \ln\left(\frac{a_2}{h_2}\right) + \ln\left(\frac{a_3}{h_4}\right) + \dots + \ln\left(\frac{a_{n-1}}{h_n}\right) \right].$$

Воспользовавшись в правой части последнего уравнения свойством логарифма и определением коэффициента обжима, получим:

$$A = p_{\text{cp}} \cdot V \cdot \ln \left[\phi_1 \cdot \phi_2 \cdot \dots \cdot \phi_{n-1} \cdot \frac{h_0}{h_n} \right]. \quad (25.8)$$

Протяжка круглой заготовки на плоских бойках приводит к **осевой рыхлости**, поэтому используют фасонные бойки (рис. 25.5).

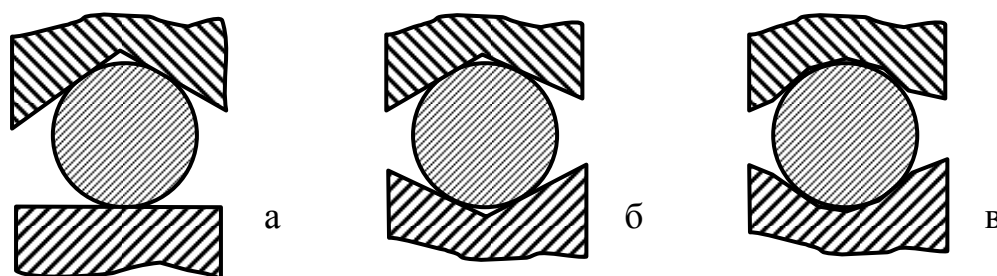


Рис. 25.5. Протяжка заготовки в фасонных бойках: а, б – обкатка граней слитков; в – отделка круглых поковок

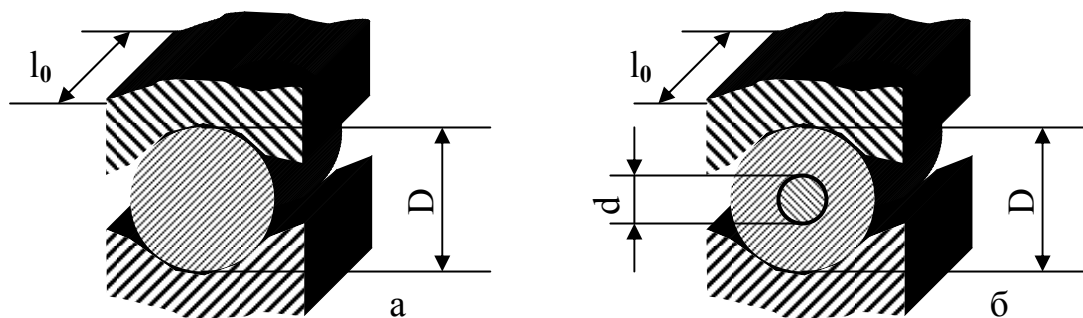


Рис. 25.6. Схемы протяжки в вырезных бойках: а – без оправки; б – с оправкой

Расчет удельных давлений для схем без оправки и с оправкой (рис. 25.6) производят в соответствии со следующими формулами:

$$p = \sigma_s^* \cdot \left(1 + \frac{2}{3} \cdot \frac{l_0}{D} \right) \{ \text{без оправки} \}; \quad (25.9)$$

$$p = 1,05 \cdot \sigma_s^* \cdot \left(1 + \frac{f}{3} \cdot \left(\frac{1}{d} + \frac{1}{D} \right) \cdot l_0 \right) \{ \text{с оправкой} \}, \quad (25.10)$$

где l_0 – длина бойка.

Формула (25.10) **асимптотически некорректна**: при $d \rightarrow 0$ удельное усилие стремится к бесконечности, в то время как оно должно была бы в этом случае совпадать с формулой (25.9), хотя такое совпадение и имеет место при $d = D$. В диапазоне практических значений параметров этими формулами можно пользоваться для расчетных целей.

3. Прошивка – кузнечная операция, при помощи которой получают в заготовках отверстия (рис. 25.7).

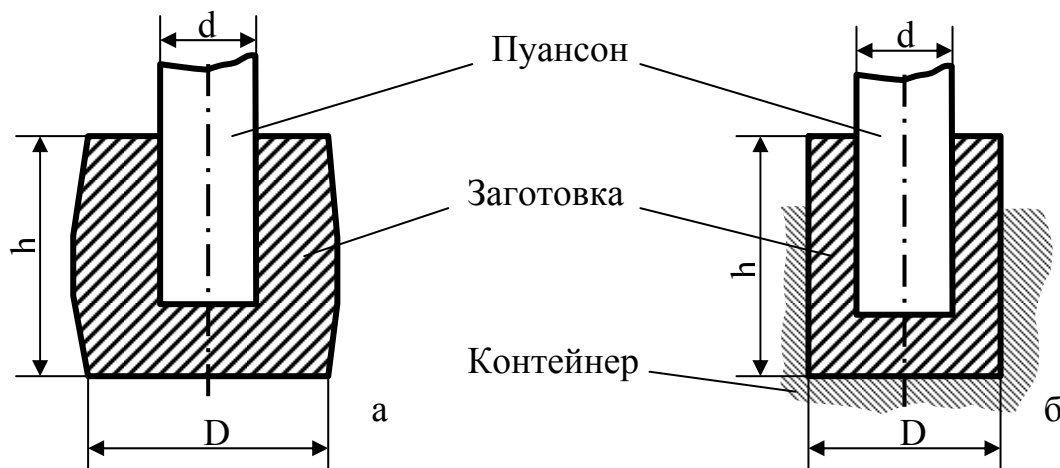


Рис. 25.7. Прошивка заготовки: а – открытая; б – закрытая

Открытая прошивка цилиндрических заготовок осуществляется обычно при соотношении $\frac{D}{d} > 2$. При значении $\frac{D}{d}$ порядка 5...6, схема прошивки практически не отличается от схемы внедрения пуансона в плоское полупространство.

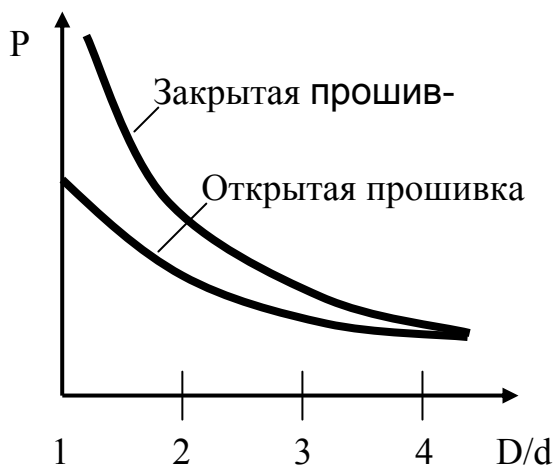


Рис. 25.8. Зависимость усилия прошивки от соотношения диаметров заготовки и пуансона

При **закрытой прошивке** соотношение $\frac{D}{d}$ обычно менее 2. Соотношение усилий при открытой и закрытой прошивках показано на рис. 25.8.

Рассмотрим задачу открытой прошивки (рис. 25.9). **Полное усилие** на пуансоне дается формулой

$$P = P_1 + P_2, \quad (25.11)$$

где P_1 – усилие, потребное для осадки материала непосредственно под пуансоном; P_2 – усилие скола материала по контуру пуансона.

При прошивке в горячую формула (24.14) для осадки полосы может быть преобразована для осесимметричного случая таким образом:

$$\tau_k = -f \cdot \sigma_s = -\frac{\sigma_s}{2}; \quad \sigma_{33} = \frac{2 \cdot \tau_k}{h} \cdot x_1 + C = \frac{\sigma_s \cdot \rho}{h} + C. \quad (25.12)$$

Коэффициент C в формуле (25.12) можно определить, используя решение задачи о деформировании круговой заготовки (см. формулу (20.7)), полагая, что радиальные напряжения на границе отождествляются с радиальным давлением со стороны заготовки:

$$\sigma_p = -\sigma_s^* \cdot \ln \frac{D}{d}. \quad (25.13)$$

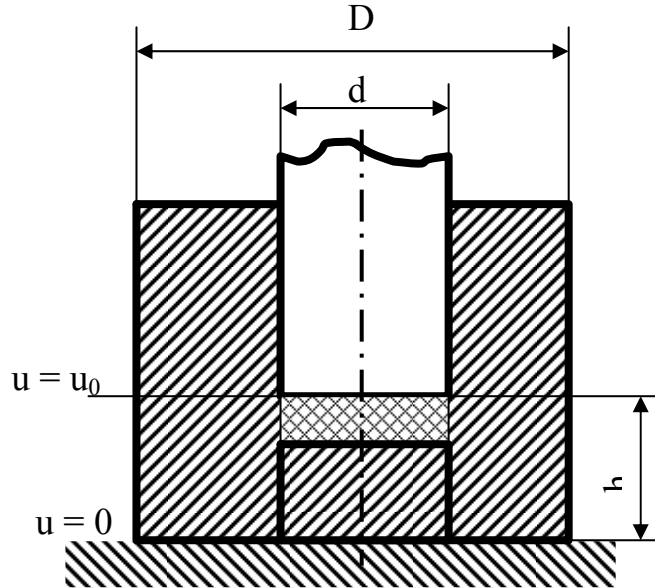


Рис. 25.9. Открытая прошивка

Связь радиальных и нормальных напряжений выражается **условием пластичности** в виде

$$\sigma_{33} - \sigma_p = -\sigma_s. \quad (25.14)$$

Последовательное преобразование формул (25.12) – (25.14) дает:

$$\sigma_p = \sigma_{33} + \sigma_s = \sigma_s + \frac{\sigma_s \cdot \rho}{h} + C; \quad \sigma_p \left(\rho = \frac{d}{2} \right) = \sigma_s + \frac{\sigma_s \cdot d}{2 \cdot h} + C = -\sigma_s^* \ln \frac{D}{d};$$

$$C = -\sigma_s^* \cdot \ln \frac{D}{d} - \frac{\sigma_s \cdot d}{2 \cdot h} - \sigma_s; \quad \sigma_3 = \frac{\sigma_s \cdot \rho}{h} - \frac{\sigma_s \cdot d}{2 \cdot h} - \sigma_s - \sigma_s^* \cdot \ln \frac{D}{d}.$$

Окончательно:

$$\sigma_3 = -\sigma_s \left[1 + \frac{2}{\sqrt{3}} \ln \frac{D}{d} - \frac{(\rho - d/2)}{h} \right]. \quad (25.15)$$

Полученное значение нормального напряжения (25.15) можно использовать для вычисления P_1 :

$$P_1 = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{d/2} |\sigma_3| \cdot \rho \cdot d\rho = \sigma_s \cdot \frac{\pi \cdot d^2}{4} \cdot \left(1 + \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \ln \left(\frac{D}{d} \right) + \frac{d}{6 \cdot h} \right), \quad (25.16)$$

откуда удельное усилие p_1 определяется элементарно:

$$p_1 = \sigma_s \cdot \left[1 + \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \ln\left(\frac{D}{d}\right) + \frac{d}{6 \cdot h} \right]. \quad (25.17)$$

Для определения удельного усилия p_2 , возникающего от **среза**, используем метод баланса работ. Работа среза определяется соотношением:

$$A_{\text{ср}} = \pi \cdot d \cdot h \cdot \tau_k \cdot \left(\frac{u_0 - 0}{2} \right) = \pi \cdot d \cdot h \cdot \frac{\sigma_s}{2} \cdot \frac{u_0}{2}. \quad (25.18)$$

Работа преодоления сопротивления срезу, исчисляемая при перемещении пуансона, записывается формулой

$$A_{\text{српо}} = p_2 \cdot \frac{\pi \cdot d^2}{4} \cdot u_0. \quad (25.19)$$

Приравнявая формулы работы (25.18) и (25.19), получим:

$$p_2 = \sigma_s \cdot \frac{h}{d}. \quad (25.20)$$

Складывая формулы (25.17) и (25.20), получим **полное удельное усилие**:

$$p = \sigma_s \cdot \left[1 + \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \ln\left(\frac{D}{d}\right) + \frac{d}{6 \cdot h} + \frac{h}{d} \right]. \quad (25.21)$$

Формула (25.21) получена Е. П. Унксовым. Используя данную формулу, можно вычислить полное потребное усилие для прошивки путем простого умножения удельного усилия на площадь торца пуансона.

Удельное усилие (25.21) можно минимизировать по величине d/h , определив тем самым условие соотношения высоты заготовки и диаметра пуансона для создания оптимального силового режима деформирования. Выполняя дифференцирование (25.21) и приравнявая производную нулю, получим:

$$\frac{d}{h} = \sqrt{6}; \Rightarrow p = \left[2 + \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \ln\left(\frac{D}{d}\right) \right]. \quad (25.22)$$

Формулы (25.21) и (25.22) справедливы для соотношений $D/d \leq 5 \dots 6$, однако вторая формула справедлива при $\frac{d}{h} \leq \sqrt{6}$.

4. Если соотношение $D/d > 6$, то задача прошивки аналогична задаче внедрения пуансона в плоское полупространство. Оценку предельных значений удельных усилий можно произвести в этом случае методом линий скольжения, разрешающее уравнение которого дается зависимостью:

$$p = 2 \cdot k \cdot (1 + \omega_{AB}), \quad (25.23)$$

где $k = \frac{\sigma_s^*}{2}$; ω_{AB} – угол между касательными к линии скольжения под инструментом и при выходе на свободную поверхность (рис. 25.10).

Для начального этапа внедрения угол поворота касательной составляет $\pi/2$, а для конечного – π . Соответственно значения удельных усилий, в силу формулы (25.23), будут равны примерно $2,8\sigma_s$ и $3,6\sigma_s$.

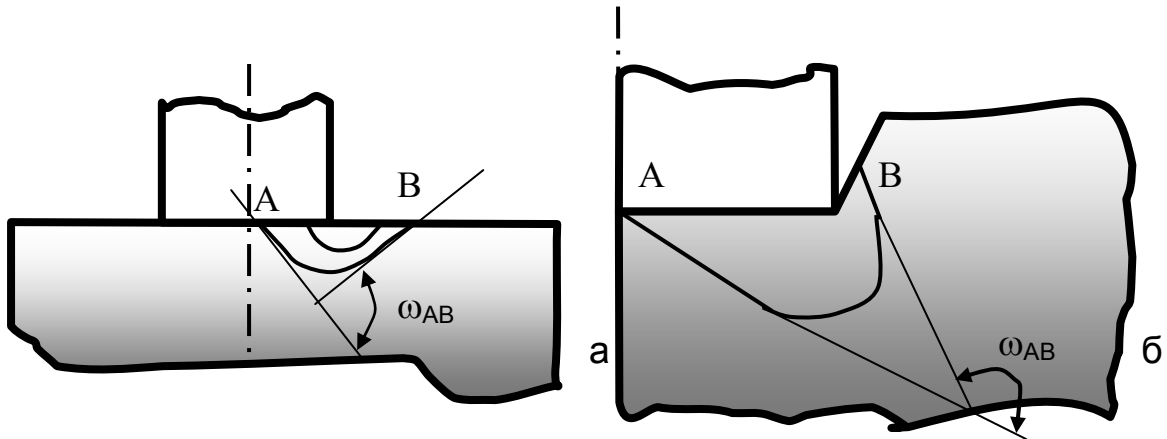


Рис. 25.10. Линии скольжения и углы между касательными при прошивке: а – начальный этап внедрения пуансона; б – конечный этап внедрения пуансона

Контрольные вопросы и упражнения

1. Сделайте вывод подсчета работы без учета изменения площади сечения заготовки.
2. Изобразите схему осадки цилиндрической заготовки.
3. Обоснуйте адаптацию формулы Зибеля к случаю осесимметричной заготовки.
4. Произведите вычисление работы при осадке цилиндрической заготовки.
5. Чем обосновывается законность применения формулы для определения работы осадки цилиндрической заготовки в случае осадки тела призматической формы?
6. В каких случаях работу осадки можно вычислять с учетом смещенного объема?
7. Какие факторы следует принимать во внимание при расчетах, относящихся к выбору подходящего оборудования?
8. Дайте определение операции протяжки.
9. Какие явления сопровождают операцию протяжки?
10. Изобразите схему протяжки на плоских бойках.
11. При каких условиях схему деформированного состояния при протяжке можно считать приближающейся к плоской?
12. В каких условиях протяжки можно использовать формулу, аналогичную формуле Зибеля? Запишите эту формулу и дайте пояснение входящих величин.
13. Какие бойки называются узкими?
14. Изобразите линии скольжения для случая протяжки на узких бойках.
15. Изобразите эпюру напряжений для протяжки на узких бойках.
16. При каких условиях растягивающие напряжения достигают предела текучести в схеме протяжки на узких бойках?

17. Каковы последствия возникновения значительных растягивающих напряжений при протяжке на узких бойках?
18. Каковы условия, когда протяжка превращается в рубку?
19. Дайте определение коэффициента обжима.
20. Какие ограничения накладываются на коэффициент обжима во избежание продольного изгиба заготовки?
21. Изобразите схему последовательности обжимов и переходов при операции протяжки.
22. Вычислите работу деформирования при протяжке.
23. Какой дефект имеют круглые по сечению заготовки после протяжки на плоских бойках?
24. Изобразите схемы протяжки в фасонных бойках.
25. Запишите формулы, позволяющие вычислять удельные усилия при протяжке в вырезных бойках.
26. Изобразите схемы протяжки круглой заготовки в вырезных бойках с оправкой и без оправки.
27. В чем состоит асимптотическая некорректность формулы для определения удельного усилия в вырезных бойках с применением оправки?
28. Дайте определение операции прошивки.
29. Изобразите схемы открытой и закрытой прошивок.
30. При каких соотношениях диаметров заготовки и пуансона осуществляют открытую прошивку?
31. При каких условиях схемы прошивки и внедрения пуансона в плоское пространство совпадают?
32. Изобразите зависимость усилия прошивки от соотношения диаметров заготовки и пуансона.
33. Запишите формулу определения полного усилия прошивки. Поясните входящие величины.
34. Выполните переход от формулы определения нормального напряжения при осадке полосы к формуле нормального давления при прошивке.
35. Каким берут предельное значение коэффициента трения при горячей обработке металла?
36. Из каких соображений формируют граничные условия для процесса прошивки?
37. Запишите радиальное напряжение на внутреннем контуре толстостенной трубы.
38. В каком виде задают условие пластичности при прошивке?
39. Сделайте вывод формулы нормального напряжения под пуансоном при прошивке.
40. Произведите вывод удельного усилия на пуансоне от деформирования.
41. Запишите формулу определения работы среза и дайте соответствующее обоснование. Поясните входящие величины.
42. Как определяется работа преодоления сопротивления срезу?

43. Какой метод применяют для определения удельного усилия от среза. Сделайте вывод формулы удельного усилия среза.
44. Запишите формулу полного удельного усилия прошивки, поясните входящие величины.
45. Произведите минимизацию полного удельного усилия и запишите его конечную формулу удельного усилия после минимизации.
46. Запишите формулу определения удельного усилия, полученную на основе метода линий скольжения.
47. Изобразите расположение линий скольжения для начального и конечного этапов прошивки.
48. Каково соотношение удельных усилий для начального и конечного этапов прошивки?

Лекция 26. Прокатка широкой полосы

=====

1. Схема процесса и дифференциальное уравнение равновесия. 2. Нормальные контактные напряжения при наличии аксиальных сил. 3. Предельные возможности и усилие прокатки.

=====

1. Процесс прокатки листов и лент является одним из основных на металлургических предприятиях. На рис. 26.1 приведена схема прокатки широкой полосы. Для данного процесса выполняется условие **плоской деформации**.

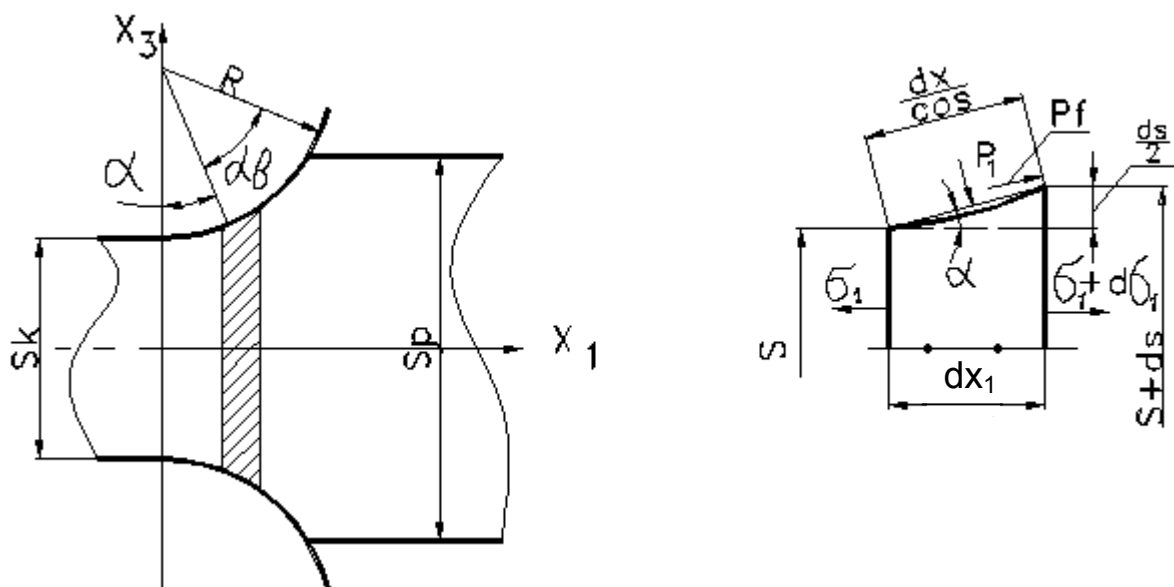


Рис. 26.1. Схема прокатки

Для выделенного элемента можно составить уравнение равновесия для проекции на ось X_1 :

$$(\sigma_1 + d\sigma_1) \cdot (S + dS) - \sigma_1 \cdot S + \frac{2 \cdot P \cdot \sin \alpha \cdot dx_1}{\cos \alpha} + \frac{2 \cdot f \cdot P \cdot \sin \alpha}{\cos \alpha} = 0, \text{ или} \\ \sigma_1 \cdot dS + S \cdot d\sigma_1 + 2 \cdot P \cdot dx_1 \cdot (\operatorname{tg} \alpha + f) = 0, \quad (26.1)$$

где f – коэффициент трения между полосой и роликом.

В случае плоской деформации **условие пластичности** имеет вид

$$\sigma_1 - \sigma_3 = \sigma_s^*.$$

Принимая $\sigma_3 = -p$, из условия пластичности следует:

$$\sigma_1 = \sigma_s^* - p; \quad d\sigma_1 = -dp. \quad (26.2)$$

Подставляя (26.2) в (26.1) с учетом очевидного соотношения $ds = 2 \cdot \operatorname{tg} \alpha \cdot dx_1$, получаем:

$$S \cdot dp - \left(\frac{P \cdot f}{\operatorname{tg} \alpha} + \sigma_s^* \right) \cdot dS = 0. \quad (26.3)$$

Поскольку в (26.3) S связано с α , то аппроксимируем дугу окружности **параболой**, поскольку в выходном сечении она имеет с окружностью общую касательную и одинаковую кривизну:

$$S = S_k + \frac{x_1^2}{R}, \text{ или } S = S_k + R \frac{x_1^2}{R^2} = S_k + R \cdot \operatorname{tg}^2 \alpha. \quad (26.4)$$

Введем новый параметр ω :

$$\operatorname{tg} \omega = \sqrt{\frac{R}{S_k}} \operatorname{tg} \alpha. \quad (26.5)$$

С учетом (26.5), из (26.4) получаем:

$$S = S_k (1 + \operatorname{tg}^2 \omega). \quad (26.6)$$

Производная (26.6) по ω имеет вид

$$\frac{dS}{d\omega} = 2 \cdot S_k \cdot \operatorname{tg} \omega \cdot (1 + \operatorname{tg}^2 \omega). \quad (26.7)$$

Подставляя (26.6) и (26.7) в (26.3), получим дифференциальное уравнение:

$$dp - (p \cdot A + 2 \cdot \sigma_s^* \cdot \operatorname{tg} \omega) \cdot d\omega = 0. \quad (26.8)$$

$$\text{где } A = 2 \cdot t \cdot \sqrt{\frac{R}{S_k}}. \quad (26.9)$$

Уравнение (26.8) получено **Карманом** в 1925 г.

Для получения **общего решения** уравнения (26.8) преобразуем его путем перегруппировки и умножения на $\exp(-A\omega)$ к виду

$$e^{-A\omega} \cdot dp - e^{-A\omega} \cdot p \cdot A \cdot d\omega = e^{-A\omega} \cdot 2 \cdot \sigma_s^* \cdot \operatorname{tg} \omega \cdot d\omega. \quad (26.10)$$

Из (26.10) следует:

$$d \cdot (e^{-A\omega} \cdot p) = e^{-A\omega} \cdot 2 \cdot \sigma_s^* \cdot \operatorname{tg} \omega \cdot d\omega.$$

Откуда после интегрирования получаем **решение Надаи**:

$$P = e^{A\omega} \cdot \left[2 \cdot \sigma_s^* \cdot \int R^{-A\omega} \cdot \operatorname{tg} \omega \cdot d\omega + C_1 \right], \quad (26.11)$$

где C_1 – постоянная интегрирования.

Принимая $\operatorname{tg} \omega \approx \omega$, $C_1 / \sigma_s^* = C$, $\int e^{-A\omega} \cdot \operatorname{tg} \omega \cdot d\omega \approx \int e^{-A\omega} \cdot \omega \cdot d\omega = -e^{-A\omega} \cdot \frac{(1 + A \cdot \omega)}{A^2}$,
 придадим решению Надаи (26.11) следующую компактную форму:

$$\frac{P}{\sigma_s^*} = C \cdot e^{A\omega} - \frac{2}{A^2} \cdot (1 + A \cdot \omega). \quad (26.12)$$

В 1948 г. **Блэнд и Форд** решили уравнение (26.8), положив $\sigma_s^* \approx P$, и получили следующее решение:

$$\frac{P}{\sigma_s^*} = C \cdot \frac{e^{A\omega}}{\cos^2 \omega}. \quad (26.13)$$

2. Прокатка может осуществляться при наличии **натяжения** (передний натяг) и **противонатяжения** (задний натяг) с приложением напряжений σ_F и σ_R соответственно. У выходного сечения (**зона прессования**) материал движется быстрее инструмента и сила трения направлена противоположно движению заготовки, так что справедливы уравнения (26.3) и (26.8). Вблизи входного сечения (**зона захвата**) направление силы трения совпадает с движением заготовки, так что в уравнениях (26.3) и (26.8) знак силы трения меняется на противоположный:

$$dP - (2 \cdot \sigma_s^* \cdot \operatorname{tg} \omega - P \cdot A) \cdot d\omega = 0. \quad (26.14)$$

Граничное условие в зоне прессования с учетом условия пластичности имеет вид ($\omega = 0$):

$$\sigma_1 = \sigma_s - P = \sigma_R. \quad (26.15)$$

Подстановка (26.15) в решение (26.12) дает:

$$C = 1 + \frac{2}{A^2} - \frac{\sigma_R}{\sigma_s^*}. \quad (26.16)$$

Из (26.12) и (26.16) получаем **давление** на валки в **зоне прессования**:

$$\frac{P}{\sigma_s^*} = e^{A\omega} \left(1 + \frac{2}{A^2} - \frac{\sigma_R}{\sigma_s^*} \right) - \frac{2}{A^2} \cdot (1 + A \cdot \omega). \quad (26.17)$$

Для **зоны захвата** решение уравнения (26.14) с учетом смены знака коэффициента трения имеет вид

$$\frac{P}{\sigma_s^*} = C \cdot e^{-A\omega} - \frac{2}{A^2} (1 - A \cdot \omega). \quad (26.18)$$

С учетом условия пластичности граничное условие задается соотношением ($\omega = \omega_b$):

$$\sigma_1 = \sigma_s^* - p = \sigma_F. \quad (26.19)$$

Из (26.18) и (26.19) получаем:

$$C = e^{A\omega_b} \left[1 + \frac{2}{A^2} (1 - A\omega_b) - \frac{\sigma_F}{\sigma_s^*} \right]. \quad (26.20)$$

Подстановка (26.20) в (26.12) дает формулу давления в зоне захвата:

$$\frac{P}{\sigma_s^*} = e^{A(\omega_b - \omega)} \left[1 + \frac{2}{A^2} \cdot (1 - A \cdot \omega_b) - \frac{\sigma_F}{\sigma_s^*} \right] - \frac{2}{A^2} \cdot (1 - A \cdot \omega). \quad (26.21)$$

Анализ формул (26.17) и (26.21) свидетельствует, что противонапряжение сильно влияет на величину P , чем натяжение (рис. 26.2).

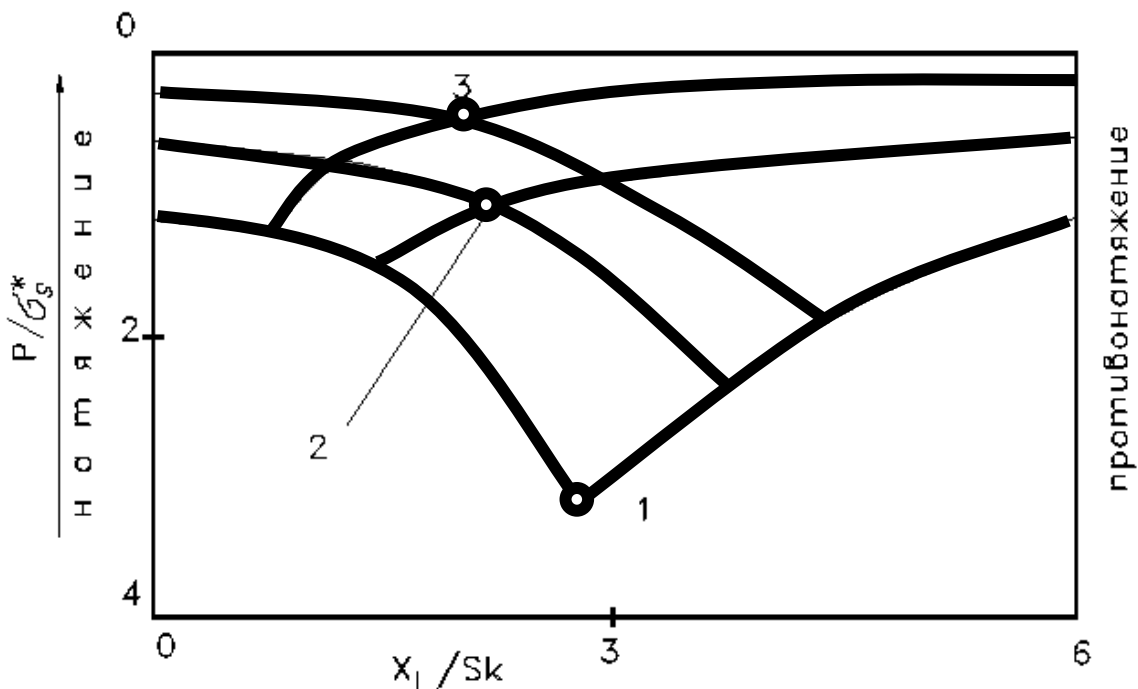


Рис. 26.2. Распределение давления при прокатке: 1 – $\sigma_R = \sigma_F = 0$; 2 – $\sigma_R = \sigma_F = 0,5\sigma_s^*$; 3 – $\sigma_R = \sigma_F = 0,75\sigma_s^*$

3. Решения (26.17) и (26.21) позволяют ответить на ряд вопросов:

- О положении **нейтрального сечения** путем «сшивания» решения для зон захвата и прессования.

- О пределе прокатки, когда область прессования как бы исчезает. Для этого в уравнении для определения нейтрального сечения следует значению параметра ω_0 или α_0 , определяющего положение нейтрального сечения, придать нулевое значение, а затем определить величину ω_b (или **угол захвата** α_b из уравнения (26.5). В отсутствие аксиальных сил $\omega_b \approx A$ или $\alpha \approx 2f$.

• **О суммарной погонной силе** давления на валки путем интегрирования давления по длине зоны контакта:

$$P = R \left[\int_0^{\alpha_n} P_n \cdot d\alpha + \int_{\alpha_0}^{\alpha_b} P_3 \cdot d\alpha \right], \quad (26.22)$$

где P_n , P_3 – давление в зонах прессования и захвата соответственно.

К сожалению, получение конкретных результатов в данном случае возможно только с применением ЭВМ или численных методов.

Контрольные вопросы и упражнения

1. Какой вид деформации имеет место при прокатке?
2. Изобразите схему прокатки.
3. Изобразите выделенный элемент заготовки под роликами и нанесите обозначения напряжений и геометрических характеристик для последующего составления дифференциального уравнения равновесия.
4. Составьте уравнение равновесия для выделенного элемента заготовки.
5. Приведите уравнение равновесия к форме в дифференциалах.
6. Запишите условие пластичности применительно к выбранной схеме прокатки.
7. Обоснуйте равенство нормальной компоненты напряжений контактному давлению.
8. Приведите уравнение в дифференциалах к форме, включающей давление и толщину заготовки в качестве функции и аргумента.
9. Какой вид аппроксимации можно принять для установления связи толщины заготовки и какой угол контакта заготовки и инструмента? Чем обусловлен такой выбор аппроксимации?
10. Запишите уравнение связи толщины заготовки с углом контакта заготовки и инструмента.
11. Как вводится новый обобщенный параметр для угла контакта? Сделайте преобразования выражения для текущего значения толщины заготовки к форме, содержащей новый параметр.
12. Преобразуйте уравнение равновесия в терминах напряжений и толщины к форме, содержащей напряжения и новый параметр (уравнение Кармана).
13. Проинтегрируйте уравнение Кармана и получите решение Надаи.
14. Какие допущения и преобразования следует выполнить для придания решению Надаи компактной формы.
15. Объясните законность допущения Блэнда и Форда для решения уравнения Кармана.
16. Проинтегрируйте уравнение Кармана с допущением Блэнда и Форда.
17. Какие схемы прокатки с приложением продольных усилий можно рассматривать для снижения контактных напряжений?

18. Укажите соотношение скоростей движения материала и инструмента, а также направление силы трения по отношению к движению заготовки в зоне прессования.
19. Укажите соотношение скоростей движения материала и инструмента, а также направление силы трения по отношению к движению заготовки в зоне захвата.
20. Какой вид имеет уравнение Кармана для зоны захвата?
21. Какой вид имеет граничное условие в зоне прессования?
22. Определите константу интегрирования в решении для зоны прессования.
23. Получить решение для определения давления на валки в зоне прессования.
24. Запишите решение уравнение Кармана для зоны захвата.
25. Сформулируйте граничное условие для зоны захвата.
26. Определите константу интегрирования для зоны захвата с учетом граничного условия.
27. Сделайте полный вывод формулы контактного давления в зоне захвата.
28. Какой вид продольного натяжения полосы является более действенным для снижения контактных напряжений?
29. Изобразите диаграмму, показывающую распределение давления при прокатке при различных величинах натяжения и противонапряжения.
30. Каким образом можно определить положение нейтрального сечения при прокатке? Дайте Ваше толкование понятия «нейтральное сечение».
31. Дайте определение угла захвата. Чему равен угол захвата в случае отсутствия продольных (аксиальных) сил?
32. Запишите формулу определения суммарной погонной силы давления на валки.

Лекция 27. Прессование в конической матрице

=====

1. Общее представление о процессе. 2. Цилиндрический выходной участок матрицы. 3. Баланс работ в коническом участке матрицы. 4. Цилиндрический участок-приемник.

=====

1. Выдавливанием получают прутки, профили, трубы, детали с утолщением типа клапанов и т. д. Условно процессы выдавливания можно разделить на штамповку выдавливанием и прессование; их схемы напряженно-деформированного состояния принципиально не отличаются. Различие **штамповки выдавливанием** и **прессования** заключается в следующем:

- при штамповке объем недоштампованного объема определяется конструкцией поковки, а не размерами пресс-остатка;
- при штамповке поковка выталкивается после обратного хода пресса, а не отделяется от пресс-остатка, как при прессовании.

Рассмотрим процесс выдавливания (рис. 27.1), когда матрица состоит из **выходного цилиндрического участка 1** (калибрующего), **заходного конического участка 2** (где происходит основная деформация) и цилиндрического **контейнера-приемника 3**.

2. При установившемся течении в **выходном участке** радиальное напряжения σ_r не может превышать предела текучести σ_s (см. приближенное условие пластичности в лекции 15):

$$|\sigma_r| \leq \sigma_s^1. \quad (27.1)$$

В неравенстве (27.1) и далее верхний индекс соответствует номеру участка матрицы. Соппротивление движению металла будет создавать **контактное трение** (размерные параметры – см. рис. 27.1):

$$P_1 = f \cdot |\sigma_r^1| \cdot \pi \cdot d \cdot l = f \cdot \sigma_s^1 \cdot \pi \cdot d \cdot l. \quad (27.2)$$

Удельное усилие на первом участке:

$$p_1 = \frac{P_1}{\left(\frac{\pi \cdot d^2}{4}\right)} = \sigma_s^1 \cdot \frac{4 \cdot f \cdot l}{d}. \quad (27.3)$$

3. **Конический участок** будем исследовать в сферической системе координат ρ , φ и θ . Верхняя и нижняя границы очага деформации могут быть представлены поверхностями шаровых секторов с радиусами b и a соответственно (рис. 27.2). Угол φ изменяется в пределах угла γ , а от угла θ в окружном направлении ничего не зависит вследствие осевой симметрии задачи.

Давление на нижнюю границу с начала деформации равно P_1 , а давление на верхней границе (с радиусом кривизны «b») P_2 является искомым. Пусть смещение частиц происходит только вдоль радиусов следовательно, $U_\varphi = U_\theta = 0$. Применяя **метод баланса работ**, можно написать:

$$A_2 = A_D + A_T + A_1, \quad (27.4)$$

где A_2 – работа силы P_2 ; A_D – рабо-

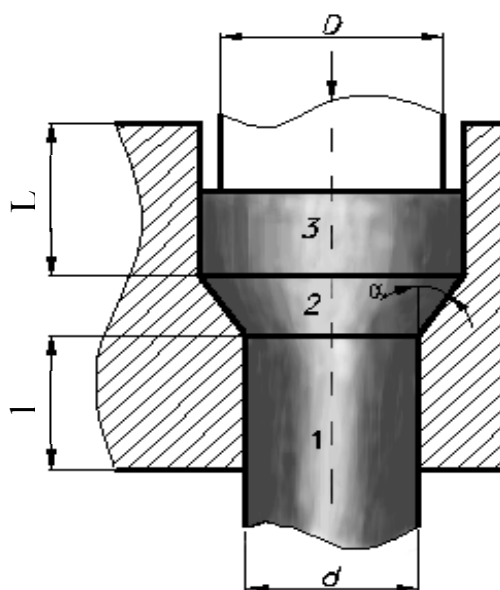


Рис. 27.1. Схема прессования

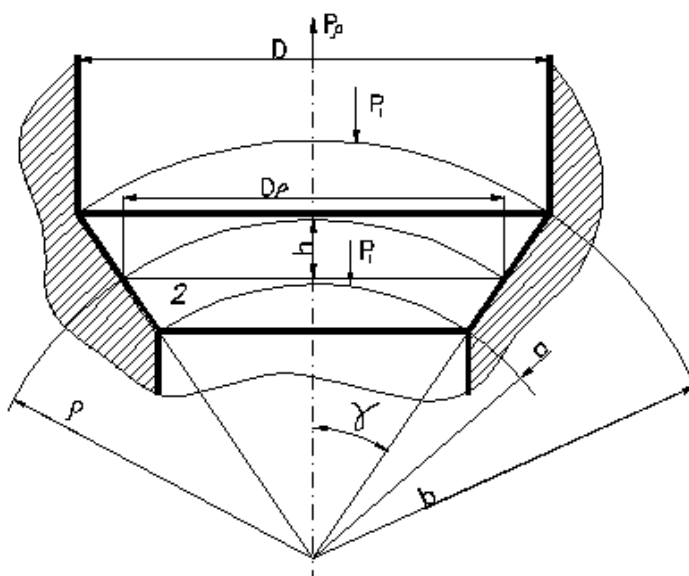


Рис. 27.2. Конический участок матрицы

та изменения формы; A_T – работа сил трения; A_1 – работа силы P_1 .

Работа A_2 определяется формулой

$$A_2 = P_2 \cdot U_\rho^b, \quad (27.5)$$

где U_ρ – перемещение вдоль радиуса – вектора ρ .

Предварительно найдем **деформации**. Вследствие равенства кривизн в направлениях φ и θ , с учетом условия несжимаемости (13.20) и определения интенсивности деформаций (13.23), имеют место соотношения:

$$\varepsilon_\theta = \varepsilon_\varphi = -0,5 \cdot \varepsilon_\rho; \quad \varepsilon_i = \pm \varepsilon_\rho, \quad (27.6)$$

А с учетом определения деформации:

$$\varepsilon_\rho = \frac{\partial U_\rho}{\partial \rho}; \quad \varepsilon_\varphi = U_\theta = \frac{U_\rho}{\rho}. \quad (27.7)$$

Из (13.20) получим:

$$\frac{\partial U_\rho}{\partial \rho} + 2 \frac{U_\rho}{\rho} = \frac{\partial}{\partial \rho} (U_\rho \cdot \rho^2) = 0. \quad (27.8)$$

Интегрирование (27.8) дает:

$$U_\rho \rho^2 = f(\varphi). \quad (27.9)$$

С учетом граничных условий на верхней поверхности имеем из (27.9):

$$U_\rho^b \cdot b^2 = f(0). \quad (27.10)$$

Положим, что правая часть (27.9) слабо зависит от φ , так что вблизи верхней границы:

$$U_\rho = U_\rho^b \left(\frac{b}{\rho} \right)^2. \quad (27.11)$$

$$\varepsilon_i = \frac{dU_\rho}{d\rho} = 2 \cdot U_\rho^b \cdot \rho^{-3}. \quad (27.12)$$

Работа деформации:

$$A_D = \iiint_V \sigma_s^b \cdot \varepsilon_i \cdot dV. \quad (27.13)$$

Элементарный объем в сферической системе координат для произвольного радиуса ρ дается формулой

$$dV = (2 \cdot \pi \cdot \rho \cdot h) \cdot d\rho. \quad (27.14)$$

Подставляя (27.12) и (27.14) в (27.13), получим:

$$A_D = \sigma_s^b \cdot 4\pi \cdot U_\rho^b \cdot b^2 \cdot (1 - \cos \gamma) \cdot \int_a^b \frac{d\rho}{\rho}. \quad (27.15)$$

Работа сил трения:

$$A_T = \iint_A \tau_k U_\rho^k dA, \quad (27.16)$$

где τ_k , U_ρ^F – контактное напряжение и перемещение на контактной поверхности соответственно.

В силу (27.11):

$$U_p^k \approx U_p^b \cdot \left(\frac{b}{\rho}\right)^2, \quad (27.17)$$

а дифференциал площади dA дается соотношением:

$$dA = \pi \cdot D_p \cdot d\rho = 2 \cdot \pi \cdot \rho \cdot \sin \gamma \cdot d\rho. \quad (27.18)$$

Подстановка (27.17) и (27.18) в (27.16) дает:

$$A_1 = 2\pi \cdot \tau_k \cdot U_p^b \cdot b^2 \cdot \sin \gamma \cdot \int_a^b \frac{d\rho}{\rho}. \quad (27.19)$$

Работа сопротивления со стороны участка «1» дается формулой

$$A_1 = p_1 \frac{\pi \cdot d^2}{4} \cdot U_p^a, \quad (27.20)$$

где $U_p^a = U_p^b \cdot \frac{b^2}{a^2}$.

Подставляя (27.5), (27.15) и (27.19) в (27.4), после интегрирования и элементарных преобразований получим:

$$P_2 = [\tau_k \cdot \pi \cdot b^2 \cdot \sin \gamma + \sigma_s^b \cdot 2 \cdot \pi \cdot b^2 \cdot (1 - \cos \gamma)] \cdot \ln \frac{b^2}{a^2} + P_1 \cdot \frac{\pi \cdot d^2}{4} \cdot \frac{b^2}{a^2}. \quad (27.21)$$

С учетом соотношений:

$$b^2 = \frac{D^2}{4 \cdot \sin^2 \gamma} = \frac{D^2}{4 \cdot (1 - \cos \gamma)}; \quad \frac{b^2}{a^2} = \frac{D^2}{d^2} = \frac{A_2}{A_1}, \quad (27.22)$$

где A_1, A_2 – площади сечения на входе и выходе матрицы

Деление (27.21) на A_2 дает удельное усилие на верхней границе:

$$p_2 = \left(\frac{\tau_k}{\sin \gamma} + \frac{2\sigma_s^b}{1 + \cos \gamma} \right) \cdot \ln \frac{A_2}{A_1} + P_1. \quad (27.23)$$

Формула (27.23) получена И. Л. Перлиным. При углах $\gamma > 55^\circ$ возможно появление «мертвых углов» (жестких зон). При малых углах γ ($\sin \gamma \approx \gamma$; $\cos \gamma \approx 1$) без учета трения и сил сопротивления со стороны выходной части матрицы получаем удельное усилие для **идеального случая**:

$$p_2 = \sigma_s^b \cdot \ln \frac{A_2}{A_1}. \quad (27.24)$$

4. Если исследовать линии скольжения при значительном трении и неоднородности материала, то окажется, что **сетка линий скольжения** значительно искривляется (рис. 27.3). Исследования Л. В. Прозорова показывают, что

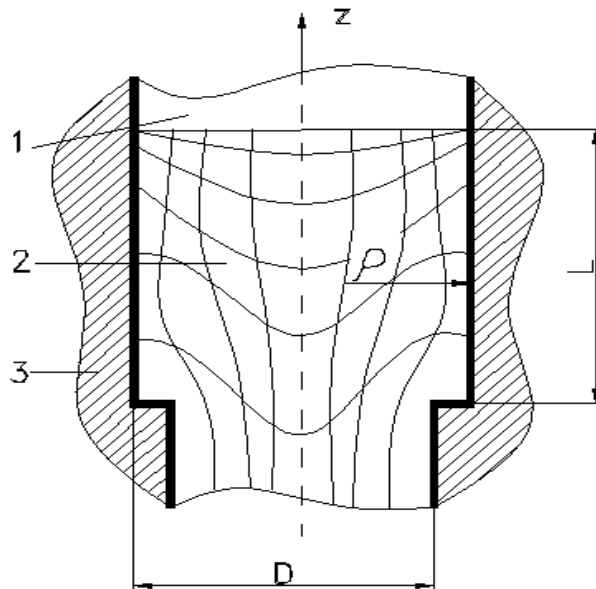


Рис. 27.3. Цилиндрический приемник: 1 – плунжер; 2 – заготовка; 3 – матрица

$\sigma_p \leq \sigma_z$, а силу трения о стенки приемника с некоторым превышением можно взять в следующем виде:

$$P_{\text{тр}} = 0.5 \cdot \sigma_{\text{sx}}^3 \cdot \pi \cdot D \cdot L, \quad (27.25)$$

откуда удельное усилие от действия трения получаем в виде

$$p_{\text{тр}} = \sigma_{\text{sx}}^3 \cdot \frac{2 \cdot L}{D}. \quad (27.26)$$

Окончательно удельное усилие на пуансоне определяется формулой

$$p_3 = p_2 + p_{\text{тр}}, \quad (27.27)$$

где p_2 определяется формулой (27.23), а $p_{\text{тр}}$ – формулой (27.26).

Если форма матрицы отличается от формы, приведенной на рисунке 27.1, то, по крайней мере, расчетная формула (27.23) должна быть надлежащим образом скорректирована.

Контрольные вопросы и упражнения

1. Назовите виды деталей, получаемых выдавливанием.
2. Поясните различие процессов штамповки выдавливанием и прессования.
3. Изобразите схему прессования в матрице с коническим участком.
4. Как определяется сопротивление движению в выходном сечении?
5. Получите формулу удельного усилия в выходном сечении.
6. Какая система принимается для изучения конического участка и как направлены оси координат?
7. Вдоль каких координатных осей перемещения можно считать незначительными?
8. Запишите формулировку баланса работ в конической части матрицы.
9. Запишите формулу для определения работы внешних сил для конического участка матрицы.
10. Выполните вывод формулы радиальных перемещений.
11. Выполните расчеты деформаций и интенсивности деформаций для конического участка матрицы.
12. Как определяется элементарный объем в конической части заготовки?
13. Выполните эскиз конической части заготовки с указанием границ и начала выбранной системы координат.
14. Произведите подстановку интенсивности и выполните интегрирование в формуле для работы деформации.
15. Выполните интегрирование для определения сил трения.
16. Вычислите работу сопротивления со стороны выходного участка матрицы.
17. Определите усилие прессования через конический и выходной участки матрицы.
18. Получите формулу для определения удельного усилия формообразования заготовки в коническом и выходном участках матрицы.
19. Какие углы конического участка можно считать предельными?

20. Получите формулу удельного усилия из общей формулы удельного усилия для конического и выходного участков матрицы. Какие допущения следует при этом принять?
21. В каком виде можно взять формулу для сил трения во входном участке матрицы.
22. Сделайте вывод формулы удельного давления во входном участке.
23. Запишите формулу определения удельного усилия на пуансоне.
24. Изобразите искривление координатной сетки в приемной части матрицы.
25. Следует ли менять процедуру расчетов, если изменяется только форма средней части матрицы?

Лекция 28. Объемная штамповка в открытых штампах

=====

1. Общая постановка задачи штамповки в открытом штампе. 2. Удельное усилие деформирования заусенца. 3. Удельное усилие в полости штампа. 4. Полное усилие штамповки.

=====

1. Детали, получаемые штамповкой в открытых штампах, могут быть достаточно сложными, однако в ряде случаев **разбиение** детали на участки позволяет свести задачу штамповки детали в открытом штампе к типовой задаче. Пусть требуется изготовить поковку, сечение которой показано на рис. 28.1.а. Поковка может иметь и круговое сечение. Протяженность детали не имеет значения вследствие предложения о разбиении, данного выше. На рис. 28.2. представлена схема расположения заготовки в штампе с привязкой к системе координат. Для облегчения течения материала заготовки 2 и заполнения полостей матрицы, между нижней и верхней частями штампа 1 имеется зазор под заусенец 3 (**мостик**) и последующий участок высвобождения (**магазин**) 4 для выхода заусенца при смыкании штампа.

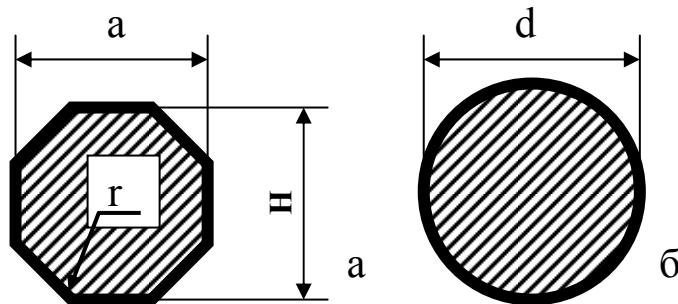


Рис. 28.1. Форма поковки для изготовления:
а – шестигранная; б – круглая

При штамповке различают **два периода**:

1. Заполнение полостей штампа с вытеканием заусенца. 2. Выдавливание в заусенец излишка материала и доштамповка поковки по высоте. Наличие заусенца **способствует наступлению текучести** при небольших давлениях. **Заполнение углов полости** штампа наступает уже при развитом пластическом течении в момент смыкания штампа.

Припуск на заусенец зависит от ряда факторов: 1. Допуск на исходную заготовку. 2. Неточность резки заготовки. 3. Изменение угла. 4. Колебания температуры штамповки. 5. Износ штампа. 6. Конструкция штампа и др.

Сопротивление течению металла при прочих равных условиях зависит от формы и размеров канавки для заусенца. **Форму и размеры канавок** под заусенец выбирают по нормальям, разработанным с учетом опытных и теоретических данных. Условие заполнения полости штампа:

$$p_{\text{п}} \leq p_{\text{з}}, \quad (28.1)$$

где $p_{\text{п}}$, $p_{\text{з}}$ – удельные усилия сопротивления заполнения полости штампа и сопротивления выхода материала в заусенец соответственно.

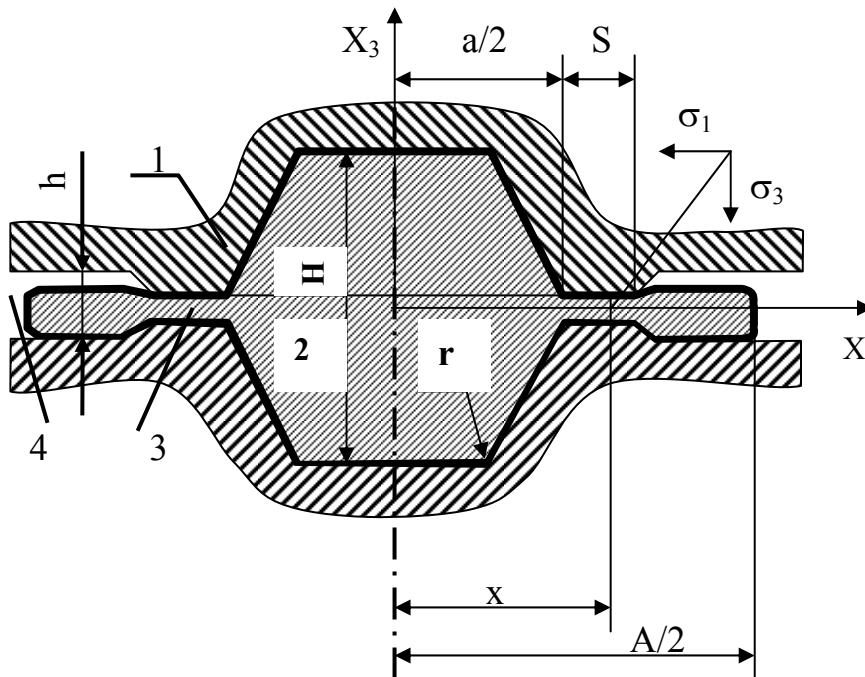


Рис. 28.2. Заготовка в открытом штампе: 1 – штамп; 2 – заготовка; 3 – зазор под заусенец; 4 – участок высвобождения

Максимальное потребное усилие деформирования заготовки P определяется в конечный момент штамповки:

$$P = P_{\text{п}} + P_{\text{з}}. \quad (28.2)$$

где $P_{\text{п}}$, $P_{\text{з}}$ – усилия, необходимые для выхода металла в заусенец и заполнение полости штампа соответственно.

Таким образом, задача состоит в определении удельных усилий $p_{\text{п}}$ и $p_{\text{з}}$, а также полных усилий $P_{\text{п}}$ и $P_{\text{з}}$ в правой части формулы (28.2).

2. При правильно сконструированной оснастке сжатие материала заусенца происходит только в зоне мостика, причем, хотя величина h и является переменной, однако ее минимальное значение в конечный момент штамповки определяется нормальями.

В зоне мостика процесс можно уподобить осадке, а потому можно использовать уравнения, полученные в лекции 24. **Касательные напряжения** будем считать постоянными и определяемыми соотношением:

$$\tau_k = -f \cdot \sigma_3, \quad (28.3)$$

где f – коэффициент трения; σ_3 – предел текучести материала заготовки.

а) Поковка удлиненной формы

Нормальное напряжение в зоне мостика, аналогично (24.14), определяют формулой

$$\sigma_3^3 = \sigma_s^* \frac{2 \cdot f \cdot x_1}{h} + C, \quad (28.4)$$

где σ_s^* – модифицированный предел текучести; C – константа, подлежащая определению.

Ввиду отсутствия сжатия материала в магазине, **граничное условие** имеет вид

$$\sigma_3^3 = -\sigma_s^* \quad \text{при } x_1 = 0,5a + S. \quad (28.5)$$

Из (28.4) и (28.5) следует:

$$C = -\sigma_s^* \left[1 + \frac{2 \cdot f \cdot (0,5a + S)}{h} \right]. \quad (28.6)$$

Подстановка (28.6) в (28.4) дает:

$$C = -\sigma_s^* \left[1 + \frac{2 \cdot f \cdot (0,5 \cdot a + S - x_1)}{h} \right], \quad (28.7)$$

откуда определяется **максимальное напряжение** при $x_1 = 0,5 \cdot a$:

$$(\sigma_3^3)_{\max} = -\sigma_s^* \cdot \left(1 + \frac{2 \cdot f \cdot S}{h} \right). \quad (28.8)$$

Деформирующую силу P_3 можно найти как площадь эпюры, построенной в соответствии с формулой (28.7) (рис. 28.3).

$$P_3 = 2 \cdot \sigma_s^* \cdot l \cdot S \cdot \left[1 + \frac{f \cdot S}{h} \right], \quad (28.9)$$

где l – длина поковки.

Площадь заусенца в плане составляет $A_3 = 2 \cdot l \cdot S$, следовательно, из (28.9) получаем **удельное усилие**:

$$\frac{P_3}{A_3} = P_3 = \sigma_s^* \cdot l \cdot S \cdot \left[1 + f \cdot \frac{S}{h} \right]. \quad (28.10)$$

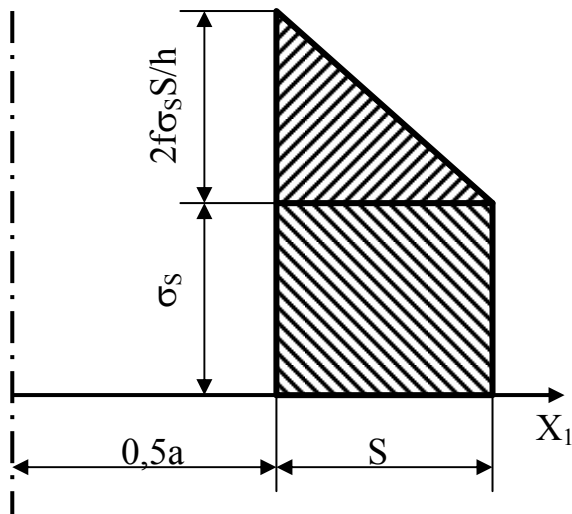


Рис. 28.3. Эпюра нормального давления

б) Поковка круглая в плане

Нормальное давление для круглой поковки, аналогично (25.12), представляется формулой

$$\sigma_z^3 = \sigma_s \cdot \frac{2 \cdot f \cdot \rho}{h} + C. \quad (28.11)$$

Граничное условие для данной задачи обусловлено наличием кольца в магазине, затрудняющего движение металла. Приведение кольца в пластическое состояние требует напряжения $\sigma_p \approx 0,5\sigma_s$, а

потому **граничное условие** имеет вид

$$\sigma_z^3 = -\sigma_s - 0,5 \cdot \sigma_s \quad \text{при } \rho = 0,5d + S. \quad (28.12)$$

Из уравнений (28.11) и (28.12) значение константы «С» легко определяется:

$$C = -\sigma_s \cdot \left[1,5 + \frac{2 \cdot f \cdot (0,5 \cdot d + S)}{h} \right]. \quad (28.13)$$

Подставляя значение «С» из (28.13) в (28.11), получаем:

$$\sigma_z^3 = -\sigma_s \cdot \left[1,5 + \frac{2 \cdot f \cdot (0,5 \cdot d + S - \rho)}{h} \right]. \quad (28.14)$$

Максимальное значение нормального напряжения (28.14) достигается при $\rho = 0,5 \cdot d$:

$$(\sigma_z^3)_{\max} = -\sigma_s \cdot \left[1,5 + \frac{2 \cdot f \cdot S}{h} \right]. \quad (28.15)$$

Усилие деформирования заусенца может быть получено интегрированием (28.14):

$$P_3 = \int_{0,5d}^{0,5d+S} (\sigma_z^3)_{\max} \cdot 2 \cdot \pi \cdot \rho \cdot d\rho. \quad (28.16)$$

Однако проще получить искомое усилие **из эпюры распределения напряжений** (28.14) с использованием второй теоремы Гульдена («Объем тела вращения, образованного вращением плоской фигуры, равно произведе-

нию площади ее на длину окружности, образованной центром тяжести этой фигуры»). На рис. 28.4 приведена эпюра напряжений по (28.14).

Здесь напряжение играет роль одной из координат. **Усилие деформации** равно сумме двух объемов «1» и «2», что представляется соотношением:

$$P_3 = 1,5 \cdot \sigma_s \cdot S \cdot \pi \cdot (d + S) + 2 \cdot f \cdot \sigma_s \cdot \frac{S}{h} \cdot \frac{S}{2} \cdot \pi \cdot (d + \frac{2}{3} \cdot S),$$

которое элементарным преобразованием приводится к виду

$$P_3 = \sigma_s \cdot \pi \cdot (d + S) \cdot S \cdot \left[1,5 + \frac{f \cdot S}{h} \cdot \frac{d + \frac{2}{3} \cdot S}{d + S} \right]. \quad (28.17)$$

Учитывая, что $A_3 = \pi \cdot (d + S) \cdot S$, а также то, что при $d \gg S$, в пределах 10% погрешности $\frac{f \cdot S}{h} \cdot \frac{d + \frac{2}{3} \cdot S}{d + S} \approx 1$, из формулы (28.17) получим удельное усилие:

$$p_3 = \sigma_s \cdot \left[1,5 + \frac{f \cdot S}{h} \right]. \quad (28.18)$$

3. При штамповке заготовок, близких к прямоугольной форме в плане, С. И. Губкин выделяет три зоны (рис. 28.5): 1. Зона **неравномерной деформации**. 2. **Пластическая линзообразная зона**. 3. **Жесткая зона**.

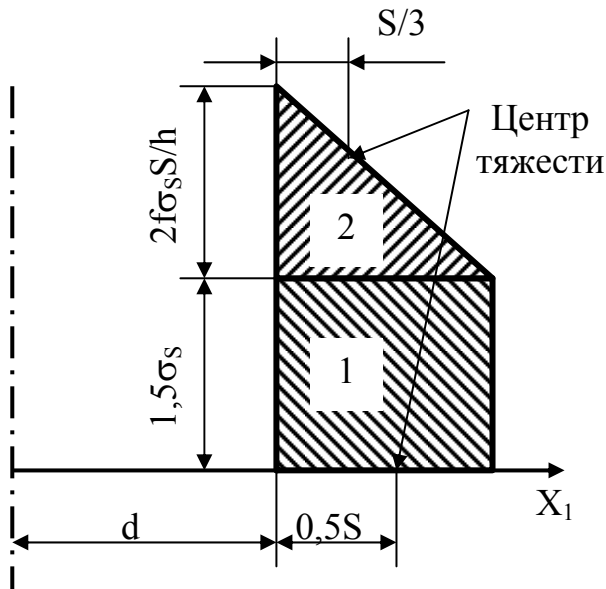


Рис. 28.4. Эпюра к применению второй теоремы Гульдена

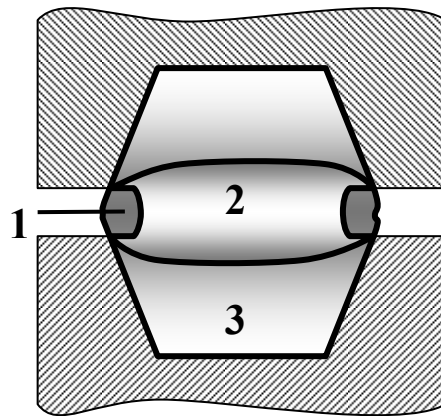


Рис. 28.5. Зоны заготовки

Во втором периоде штамповки линзообразная зона очага интенсивной деформации зависит от соотношения a/h :

$$\frac{h_0}{h} \approx \kappa \cdot \frac{a}{h}, \quad (28.19)$$

где h_0 – толщина линзообразной зоны (см. рис. 28.5).

При $a/h \approx 3$ имеет форму **двояковогнутой линзы**, а при больших значениях этого параметра – форму **двояковыпуклой линзы**. При $a/h \approx 20$ значения $h_0/h \approx 5$. При малых значениях a/h происходит выдавливание заусенца, а, по сути, осадка в кольцах. Расчетные формулы были получены комбинированным методом на основе метода линий скольжения. **Аппроксимация нормальных напряжений** на оси X была впервые представлена Макушком для поковок прямоугольного сечения в плане:

$$\sigma_3 = -\sigma_s^* \left(1 + 1,25 \cdot \ln \frac{2 \cdot x_1}{h} \right). \quad (28.20)$$

После интегрирования (28.20) и учета подпора со стороны заусенца **удельное давление в полости штампа** для стержневой поковки в условиях плоской деформации представляется формулой

$$P_n = \sigma_s^* \cdot \left(1,25 \cdot \ln \frac{a}{h} - 0,25 + \frac{2 \cdot f \cdot S}{h} \right). \quad (28.21)$$

Удельное усилие для крупных в плане поковок получено в виде

$$P_n = \sigma_s^* \cdot \left(1,25 \cdot \ln \frac{d}{h} - 0,375 + \frac{2 \cdot f \cdot S}{h} \right). \quad (28.22)$$

Последние члены в правых частях формул (28.21) и (28.22) учитывают подпор со стороны заусенца. Близкие к формулам (28.21) и (28.22) были получены и методом верхней оценки.

4. Полное усилие деформации поковки на основании (28.2) определяется с учетом полученных выше результатов:

а) для **поковок уменьшенного типа**, имеющих в плане форму прямоугольника (см. формулы (28.10) и (28.21)):

$$P = \sigma_s^* \cdot \left[\left(1 + \frac{f \cdot S}{h} \right) \cdot A_3 + \left(1,25 \cdot \ln \frac{a}{h} - 0,25 + \frac{2 \cdot f \cdot S}{h} \right) \cdot A_n \right]; \quad (28.23)$$

б) для **поковок, круглых** в плане или приближающихся к ним (см. формулы (28.18) и (28.22)):

$$P = \sigma_s^* \cdot \left[\left(1 + \frac{f \cdot S}{h} \right) \cdot A_3 + \left(1,25 \cdot \ln \frac{d}{h} - 0,375 + \frac{2 \cdot f \cdot S}{h} \right) \cdot A_n \right], \quad (28.24)$$

где A_3 – площадь проекции мостика заусенца; A_n – площадь проекции поковки в плоскости разъема.

Формулы (28.23) и (28.24) действительны в диапазоне $a/h = 15 \dots 65$ при соблюдении соотношений (рис. 28.6):

$$\frac{h_{пв}}{h} > \frac{h_0}{0,5h} > \frac{h_{пн}}{h},$$

где $h_{пв}$, $h_{пн}$ – глубина полости верхнего и нижнего штампа соответственно.

На практике:

$$\frac{h_0}{h} = (0.28...0.29) \frac{a}{h};$$

$$\frac{A}{h} = (0.67...0.64) \frac{a}{h}.$$

Предельное усилие достигается, когда глубина полости штампа становится соизмеримой с высотой заусенца. Фактически, это усилие осадки полосы равной по толщине высоте заусенца.

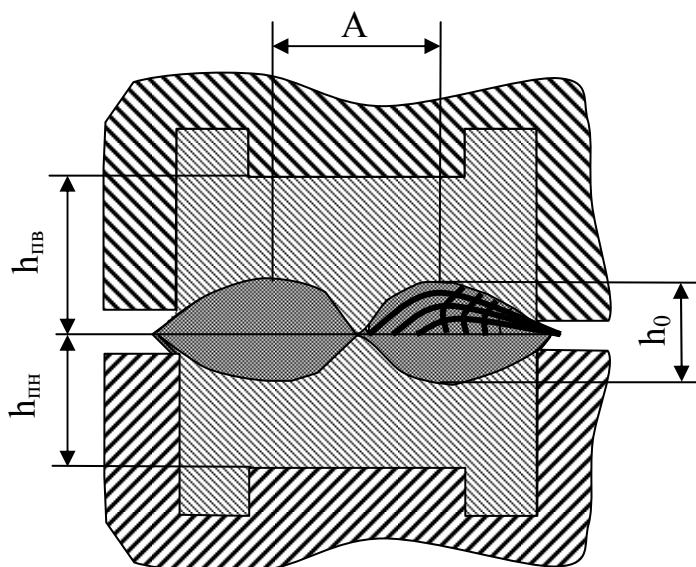


Рис. 28.6. Параметры зон пластичности

Контрольные вопросы и упражнения

1. Что делают для выполнения расчетов сложных деталей, получаемых штамповкой в открытых штампах?
2. Изобразите открытый штамп с заготовкой.
3. Что представляет собой «мостик»? Покажите его на изображении штампа.
4. Что такое «магазин» и для чего он предназначен?
5. Какие периоды различают при штамповке?
6. Что способствует наступлению текучести при малых давлениях?
7. Когда наступает заполнение углов полости штампа?
8. От каких факторов зависит припуск на заусенец?
9. От каких факторов зависит сопротивление течению металла?
10. На какой основе определяют форму и размеры канавок под заусенец?
11. Запишите условие заполнения полости штампа.
12. Запишите формулу максимального потребного усилия деформирования и укажите, на какой момент определяется это усилие.
13. В каком месте происходит сжатие материала заусенца? Укажите это место на эскизе.
14. С каким процессом можно идентифицировать процесс сжатия заусенца?
15. Как определяют касательные напряжения?
16. Запишите общий вид решения для нормального напряжения в зоне мостика.
17. Как формулируется граничное условие для зоны мостика?

18. Определите константу интегрирования общего решения нормальных напряжений и найдите ее максимальное значение.
19. Запишите формулу определения деформирующей силы для поковки удлиненной формы.
20. Запишите формулу площади заусенца в плане.
21. Получите формулу вычисления удельного усилия деформирования удлиненной поковки.
22. Запишите формулу общего решения для нормального давления для круглой поковки.
23. Чему равно радиальное напряжение для приведения кольца в пластическое состояние?
24. Сформулируйте граничное условие для определения нормального напряжения при деформировании круглой поковки.
25. Найдите константу интегрирования и распределение нормальных напряжений при деформировании круглой поковки.
26. Вычислите максимальное значение нормального напряжения при деформировании круглой поковки.
27. Запишите формулу интегрирования максимального напряжения для нахождения усилия деформирования заусенца.
28. Сформулируйте вторую теорему Гульдена.
29. Вычислите усилие деформирования для круглой поковки на основе теоремы Гульдена. Изобразите эпюру напряжений.
30. Выполните преобразования формулы усилия деформирования с учетом приближений.
31. Назовите зоны, возникающие при штамповке призматической заготовки (прямоугольной в плане).
32. Приведите рисунок зон и укажите характер пластических зон при различных соотношениях параметров.
33. Запишите формулу удельного давления в полости штампа для стержневой поковки.
34. Запишите формулы полного усилия деформирования для прямоугольных в плане и круглых поковок.
35. Каково условие достижения предельного усилия?

Лекция 29. Гибка широкой полосы

=====

1. Деформации, радиусы кривизны изгиба, радиус гiba и соотношение между упругим и пластическим участками по толщине полосы. 2. Напряжения и нейтральная поверхность напряжений. Момент при гибке. 3. Пружинение заготовки. 4. Предельные возможности.

=====

1. Гибкой называют операцию листовой штамповки, в которой происходит изгиб заготовки вдоль выбранного направления. В общем случае, кроме

момента M , на заготовку могут воздействовать аксиальные P_a и торцевые P_t силы (рис. 29.1), а также поверхностные силы.

При **гибке моментом**, как показывают эксперименты, справедлива **гипотеза плоских сечений**: сечения, расположенные вдоль нейтральной плоскости и перпендикулярно ей, не искривляются. Если полоса **широкая**, то деформацию можно считать плоской:

$$\varepsilon_\theta \neq 0; \varepsilon_\rho \neq 0; \varepsilon_z = 0. \quad (29.1)$$

Если выполняется условие постоянства объема (несжимаемости), то

$$\varepsilon_\theta + \varepsilon_\rho + \varepsilon_z = 0. \quad \varepsilon_\theta = -\varepsilon_\rho, \quad (9.2)$$

где ε_θ — окружная деформация; ε_ρ — радиальная деформация; ε_z — аксиальная деформация.

Окружную деформацию легко вычислить из геометрических параметров:

$$\varepsilon_\theta = \frac{\rho \cdot \alpha - \rho_H \cdot \alpha}{\rho_H \cdot \alpha} = \frac{\rho}{\rho_H} - 1 = \varepsilon_\theta(\rho), \quad (29.3)$$

где α — уголгиба; ρ — текущий радиус; ρ_H — нейтральный радиус деформаций (рис. 29.2).

Так как при гибке r_B (радиусгиба) и R_H меняются, нейтральный слой (линия) деформаций **дрейфует**. Примем для вычисления нейтральной линии деформации гипотезу, что **нейтральная линия делит очаг деформации на два участка с одинаковыми площадями**. Тогда имеет место соотношение:

$$\frac{R_H \cdot \alpha \cdot R_H}{2} - \frac{\alpha \cdot \rho_H^{\partial 2}}{2} = \frac{\alpha \cdot \rho_H^{\partial 2}}{2} - \frac{\alpha \cdot r_B^2}{2}. \quad (29.4)$$

В формуле верхний индекс обозначает соотношение радиуса с деформациями.

$$\rho_H^{\partial 2} = \frac{R_H^2 + r_b^2}{2} \Rightarrow \rho_H^\partial = \sqrt{\frac{R_H^2 + r_b^2}{2}}; \quad \Delta\rho = |\rho_H - \rho_H^\partial| = \{r_b \approx 2 \cdot s_0\} = 0,08 \cdot s_0, \quad (29.5)$$

где s_0 — толщина полосы.

В формуле (29.5) величина $\Delta\rho$ обозначает **смещение нейтрального слоя деформаций** по отношению к положению средней линии. При относительно

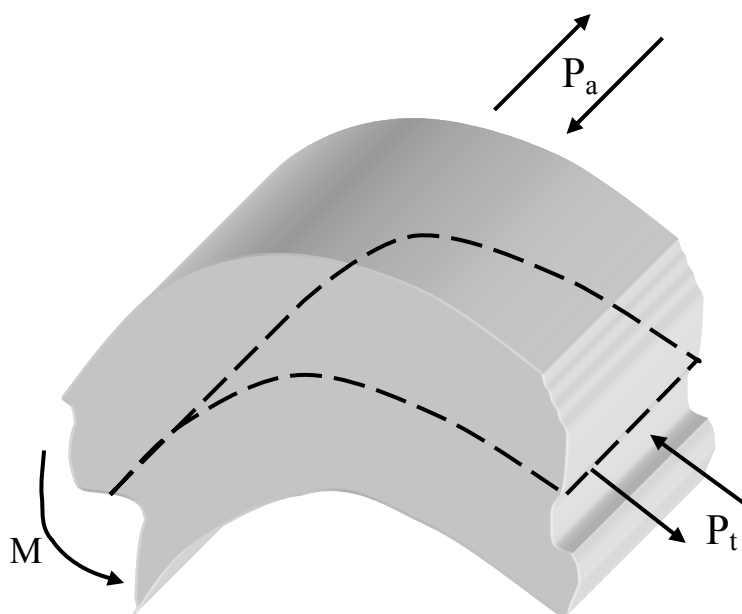


Рис. 29.1. Различные схемы гибки

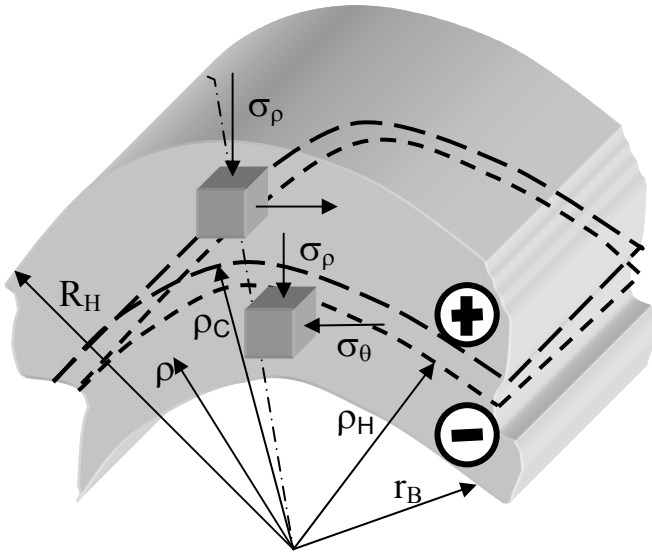


Рис. 29.2. Зона сгиба и ее геометрические параметры

больших относительных радиусахгиба это смещение незначительно, однако с увеличением толщины заготовки и уменьшением радиусагиба смещение нейтрального слоя деформаций к внутреннему контуру может стать значительным, как, впрочем, и утонение заготовки в зоне сгиба, которое иногда ограничивается требованиями к детали.

2. Вопрос о напряжениях и о нейтральном слое (поверхности) напряжений решается на основе задачи изгиба заготовки **инженерным методом**. Используем систему уравнений, включающую уравнение равновесия осесимметричной оболочки (12.10), упрощенное условие пластичности и соответствующие граничные условия:

$$\begin{cases} \frac{d\sigma_\rho}{d\rho} + \frac{\sigma_\rho - \sigma_\theta}{\rho} - \frac{f}{\sin\alpha} \left(\frac{\sigma_R}{R_\rho} + \frac{\sigma_\theta}{R_\theta} \right) = 0; \\ \sigma_\rho - \sigma_\theta = \pm\beta\sigma_s; \quad \sigma_\rho|_{R_H} = \sigma_\rho|_{r_B} = 0. \end{cases} \quad (29.6)$$

Учитывая отсутствие трения на контурах зоны сгиба ($f = 0$), а также соответствие знаков в условии пластичности зонам растяжения и зонам сжатия, рассмотрим последовательно системы для двух зон:

1. Зона растяжения:

$$\begin{cases} \frac{d\sigma_\rho}{d\rho} + \frac{\sigma_\rho - \sigma_\theta}{\rho} = 0; \\ \sigma_\rho - \sigma_\theta = -\beta\sigma_s; \quad \sigma_\rho(R_H) = 0. \end{cases} \quad (29.7)$$

Решение уравнения равновесия и условия пластичности дает:

$$\frac{d\sigma_\rho}{d\rho} = \frac{\beta\sigma_s}{\rho} \Rightarrow \sigma_\rho = \beta\sigma_s \ln\rho + \beta \ln C. \quad (29.8)$$

Используя граничное условие, определим константу «С» в решении (29.8) и подставим ее значение в то же решение:

$$\sigma_\rho^+(\rho) = \beta\sigma_s \ln \frac{\rho}{R_H}. \quad (29.9)$$

Комбинируя условие пластичности и решение (29.9), получим окружное напряжение в виде

$$\sigma_{\theta}^{+}(\rho) = \beta\sigma_s \ln \frac{\rho}{R_H} + \beta\sigma_s = \beta\sigma_s \left(1 + \ln \frac{\rho}{R_H} \right). \quad (29.10)$$

2. Зона сжатия:

$$\begin{cases} \frac{d\sigma_{\rho}}{d\rho} + \frac{\sigma_{\rho} - \sigma_{\theta}}{\rho} = 0; \\ \sigma_{\rho} - \sigma_{\theta} = \beta\sigma_s; \sigma_{\rho}(r_B) = 0. \end{cases} \quad (29.11)$$

Решение системы (29.11) имеет следующий вид:

$$\frac{d\sigma_{\rho}}{d\rho} = -\frac{\beta\sigma_s}{\rho} \Rightarrow \sigma_{\rho}(\rho) = -\beta\sigma_s \ln \rho + C. \quad (29.12)$$

Удовлетворим граничное условие для определения константы:

$$\sigma_{\rho}(r_B) = -\beta\sigma_s \ln r_B + C = 0; \quad C = \beta\sigma_s \ln r_B.$$

Подстановка константы в уравнение (29.12) дает следующие решения:

$$\sigma_{\rho}^{-}(\rho) = \beta\sigma_s \ln \frac{r_B}{\rho}; \quad \sigma_{\theta}^{-}(\rho) = \beta\sigma_s \left(\ln \frac{r_B}{\rho} - 1 \right). \quad (29.13)$$

Произведем «сшивание» решения в зоне нейтрального сечения:

$$\sigma_{\rho}^{+}(\rho_H^H) = \sigma_{\rho}^{-}(\rho_H^H); \quad \beta\sigma_s \ln \frac{\rho_H^H}{R_H} = \beta\sigma_s \ln \frac{r_B}{\rho_H^H}. \quad (29.14)$$

Из (29.14) получим радиус нейтрального слоя напряжений ρ_H^H :

$$\rho_H^H = \sqrt{R_H \cdot r_B}. \quad (29.15)$$

Для определения изгибающего момента применим формулу:

$$M = \int_{r_B}^{\rho_H} \sigma_{\theta}^{-}(\rho) \cdot \rho \cdot d\rho + \int_{\rho_H}^{R_H} \sigma_{\theta}^{+}(\rho) \cdot \rho \cdot d\rho. \quad (29.16)$$

Подставляя значения напряжений из второй формулы (29.13) и из формулы (29.10) в (29.16), получим после интегрирования:

$$M = \beta \cdot \sigma_s \cdot \left[\frac{\rho_H^2}{2} \cdot \ln \left(\frac{R_H \cdot r_B}{\rho_H^2} \right) + \frac{R_H^2 - 2 \cdot \rho_H^2 + r_B^2}{4} \right]. \quad (29.17)$$

Производя замену радиуса нейтрального слоя из (29.15) в формуле (29.17), получим:

$$M = \beta \cdot \sigma_s \cdot \frac{s^2}{4}. \quad (29.18)$$

Отсюда следует, что момент не зависит ни от угла изгиба, ни от радиуса изгиба, оставаясь постоянным при пластическом формоизменении, если не изменяется толщина заготовки.

3. Пружинение – изменение угла гибки после снятия нагрузки. Этот эффект объясняется наличием остаточных напряжений.

Воспользуемся **теоремой А. А. Ильюшина о разгрузке**: Остаточная кривизна равняется кривизне при нагружении за вычетом кривизны при разгрузке.

$$\frac{1}{\rho_{\text{ост}}} = \frac{1}{\rho_c} - \frac{1}{\rho_{\text{разг}}}; \quad \frac{1}{\rho_{\text{разг}}} = \frac{3\sigma_T}{E \cdot S}; \quad dl = \rho_c d\alpha; \quad dl' = \rho_{\text{ост}} d\alpha'; \quad d\alpha' = \frac{\rho_c}{\rho_{\text{ост}}} d\alpha, \quad (29.19)$$

где $\rho_{\text{ост}}$ – радиус остаточной кривизны; ρ_c – радиус кривизны заготовки под нагрузкой; $\rho_{\text{разг}}$ – радиус кривизны при разгрузке; E – модуль Юнга; l, l' – длина дуг в заготовке под нагрузкой и после разгрузки соответственно; α – уголгиба; α' – угол после снятия нагрузки (рис. 29.3).

Так как разгрузка происходит в пределах упругости, то имеет место соотношение, известное из курса сопротивления материалов:

$$\frac{1}{\rho_{\text{разг}}} = \frac{M}{E \cdot J}, \quad (29.20)$$

где J – момент инерции, равный для пластины единичной длины $s^3/12$.

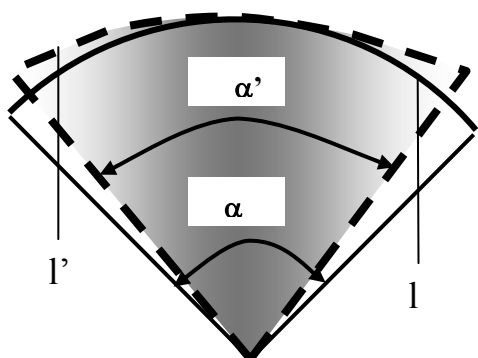


Рис. 29.3. Эффект пружинения

Подставляя в формулу (29.20) значение момента инерции J и изгибающего момента из формулы (29.18), приняв $\beta = 1$, получим зависимость, приведенную в формуле (29.19).

Образум разность

$$d\alpha - d\alpha' = d(\alpha - \alpha') = d(\Delta\alpha) = \left[1 - \frac{\rho_c}{\rho_{\text{ост}}} \right] \cdot d\alpha$$

и проинтегрируем ее по полному углу:

$$\begin{aligned} \int_0^\alpha d(\Delta\alpha) &= \left(1 - \frac{\rho_c}{\rho_{\text{ост}}} \right) \cdot \alpha = \left[1 - \rho_c \left(\frac{1}{\rho_c} - \frac{1}{\rho_{\text{ост}}} \right) \right] \cdot \alpha = \\ &= \left\langle \frac{1}{\rho_{\text{ост}}} = \frac{3 \cdot \sigma_T}{E \cdot S} \right\rangle = \frac{3 \cdot \sigma_T}{E \cdot S} \rho_c \cdot \alpha = \Delta\alpha. \end{aligned} \quad (29.21)$$

Окончательно, на основании (29.21), угол пружинения дается формулой

$$\Delta\alpha = \frac{3 \cdot \sigma_T}{E \cdot S_0} \cdot \rho_c \cdot \alpha. \quad (29.22)$$

Формула (29.22) применяется при расчетах формообразующей оснастки для гибочных операций.

4. Возможности гибки на малый радиус ограничиваются разрушением волокон заготовки на наружном контуре. Окружная деформация определяется зависимостью (29.3), для которой максимальное значение деформации на наружном контуре получается при $\rho = \rho_H \square \square + s_0/2$.

$$\varepsilon_\theta^{\text{max}} = -1 + \frac{\rho_H + s_0/2}{\rho_H} = \frac{s_0}{2 \cdot \rho_H} = \frac{s_0}{2 \cdot (r_B + s_0/2)} = \frac{s_0}{2 \cdot r_B + s_0}. \quad (29.23)$$

В упрощенном виде **условие ограничения** максимальной окружной деформации можно представить в виде

$$\varepsilon_\theta^{\text{max}} \leq \xi \cdot \delta, \quad (29.24)$$

где ξ – коэффициент запаса; δ – относительное удлинение для данного материала.

$$\frac{s_0}{2 \cdot r_B + s_0} \leq \xi \cdot \delta \Rightarrow \frac{s_0(1 - \xi \cdot \delta)}{2 \cdot \xi \cdot \delta} \leq r_B. \quad (29.25)$$

Формула (29.25) выражает предельные возможности процесса гибки. Коэффициент ξ может быть установлен для каждого материала из результатов технологических испытаний. Существует ряд и других критериев, однако наиболее приближенными к практике можно считать данные по свободной гибке, приведенные в известном справочнике В. П. Романовского.

Контрольные вопросы и упражнения

1. Дайте определение операции гибки.
2. Изобразите классификатор схем гибки, назовите термины сил, которые могут прикладываться к заготовке в процессе формообразования.
3. При какой схеме гибки справедлива гипотеза плоских сечений, в чем суть этой гипотезы? Изобразите на рисунке соответствующие сечения.
4. В каком случае схему деформаций можно считать плоской? Запишите это условие в математической форме.
5. Как связаны окружная и радиальные деформации при схеме плоской деформации?
6. Определите окружную деформацию на основе геометрических параметров. Поясните значения входящих величин и соотнесите их с эскизом зоны сгиба.
7. Что происходит с нейтральным слоем в процессе деформирования заготовки при гибке?
8. Какую гипотезу принимают для определения положения нейтральной линии деформаций?
9. Сделайте вывод уравнения для определения положения нейтральной линии деформаций.
10. Найдите математическую зависимость радиуса кривизны нейтральной линии в зависимости от геометрических параметров зоны сгиба.
11. Дайте вывод формулы смещения нейтральной линии, произведите вычисление величин смещения в терминах толщины заготовки при радиусах гiba от 1 до 5 толщин материала и укажите направление, в котором происходит данное смещение.
12. Как зависит величина смещения нейтрального слоя деформаций от толщины заготовки и радиуса гiba? Влияет ли на нее угол гибки?
13. На основе какого метода можно определить положение нейтрального слоя напряжений при гибке?
14. Какие уравнения используют для решения задачи определения напряжений?
15. Как формулируется условие пластичности для каждой из зон? Поясните, как выбирается при этом знак правой части в условии пластичности.
16. Как формулируются граничные условия для задачи гибки?

17. Почему считают, что трение не следует учитывать при использовании уравнения осесимметричной заготовки?
18. Запишите систему уравнений для определения напряжений в зоне растяжения.
19. Решите систему уравнений для зоны растяжения и найдите выражения для определения радиальных напряжений.
20. Запишите формулу для определения окружных напряжений. Из каких соотношений их можно получить?
21. Сведите систему уравнений для определения напряжений в зоне сжатия к дифференциальному уравнению с разделяющимися переменными и проинтегрируйте его.
22. Из каких условий определяют константу интегрирования при решении задачи о напряжениях в зоне сжатия?
23. Сделайте вывод формул для определения радиальных и окружных напряжений в зоне сжатия.
24. Какое соображение используют в целях определения радиуса нейтрального слоя напряжений?
25. Сделайте вывод формулы для определения радиуса нейтрального слоя и проведите вычисление его значений при изменении внутреннего радиуса от 1 до 5 в терминах толщины заготовки.
26. Запишите формулу для определения изгибающего момента.
27. Выполните интегрирование напряжений для установления формулы изгибающего момента.
28. От каких факторов зависит изгибающий момент после его преобразования с учетом зависимости формулы определения положения нейтрального слоя напряжений?
29. Какое явление называется пружинением?
30. Дайте словесную и математическую формулировку теоремы Ильюшина о разгрузке.
31. Установите связь дуг и углов для зоны сгиба.
32. Запишите формулу связи радиуса кривизны при разгрузке и изгибающего момента.
33. Сделайте вывод зависимости радиуса кривизны при разгрузке от предела текучести и модуля Юнга.
34. Сделайте вывод формулы для определения величины пружинения. Дайте пример использования данной формулы при разработке процесса гибки листа в матрице, задавшись необходимыми для расчета параметрами.
35. Чем ограничены возможности гибки листовых заготовок на малый радиус?
36. Как вычисляется максимальная деформация при изгибе заготовки?
37. Запишите условие ограничения максимальной деформации.
38. Проведите вывод формулы для определения минимально допустимого Радиуса гибки. От каких параметров зависит этот радиус?

Лекция 30. Вытяжка без утонения стенки

1. Схема вытяжки и постановка задачи. 2. Напряжения при вытяжке и усилие вытяжки. 3. Деформации при вытяжке и утонение заготовки. 4. Предельные возможности процесса.

1. Рассмотрим вытяжку **плоской круглой заготовки** (рис. 30.1), при которой пластическую деформацию получает часть заготовки (фланец), находящаяся на плоском торце матрицы и на ее скругленной кромке. Под действием пуансона средняя часть заготовки вдавливается в отверстие матрицы.

Радиальные напряжения во фланце будут растягивающими, а окружные – сжимающими (рис. 30.2). Будем считать, что:

- касательные и нормальные напряжения во фланце отсутствуют;
- материал заготовки неупрочняемый, несжимаемый, изотропный;
- принимается модель жестко пластического тела;
- донная часть заготовки близка к схеме двухосного растяжения и пребывает в упругом состоянии;
- трение на ребре матрицы учитывается законом Эйлера.

Задача заключается в определении **напряженно - деформированного состояния заготовки, потребных усилий деформирования и предельных возможностей процесса вытяжки на первом переходе.**

Сделаем несколько предварительных замечаний:

Замечание 1. Вытяжка осуществляется без прижима, когда диаметр заготовки D_0 не слишком велик по сравнению с диаметром пуансона d .

Замечание 2. Если D_0 значителен в сравнении с d , то D_0 должно быть ограниченным в соответствии со справочными данными.

Замечание 3. При слишком большом D_0 вытяжка невозможна и произойдет разрыв заготовки.



Рис. 30.1. Схема вытяжки

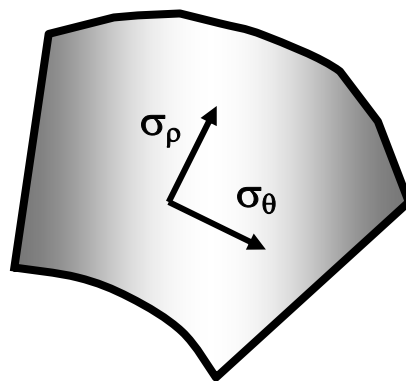


Рис. 30.2. Напряжения во фланце заготовки

2. Полное усилие деформирования P_n на пуансоне складывается из ряда частных усилий:

$$P_n = P_{\text{деф}} + P_{\text{пр}} + P_{\text{тр}} + P_{\text{раз}}, \quad (30.1)$$

где $P_{\text{деф}}$ – усилие деформирования фланца; $P_{\text{пр}}$ – усилие прижима; $P_{\text{тр}}$ – усилие от сил трения на перетяжном ребре матрицы; $P_{\text{раз}}$ – усилие разгиба заготовки при перетяжке на ребре матрицы.

Будем рассматривать предварительно усилие без учета трения на ребре матрицы:

$$P_n' = P_{\text{деф}} + P_{\text{пр}} + P_{\text{раз}}.$$

Осуществим переход к напряжениям, возникающим в вертикальной стенке заготовки:

$$\tilde{\sigma}_\Sigma = \frac{P_{\text{деф}} + P_{\text{пр}} + P_{\text{раз}}}{\pi \cdot S_0 \cdot d}. \quad (30.2)$$

$$\tilde{\sigma}_\Sigma = \sigma_{\text{деф}} + \sigma_{\text{пр}} + \sigma_{\text{раз}}. \quad (30.3)$$

Определим предварительно напряжение в вертикальной стенке от действия прижима:

$$P_{\text{пр}} = 2 \cdot f \cdot Q; \quad Q = q \cdot A; \quad A = \frac{\pi}{4} \cdot [D_k^2 - (d + S_0 + 2 \cdot r_m)^2],$$

где f – коэффициент трения; Q – усилие прижима; q – удельное усилие прижима; d – диаметр пуансона; S_0 – толщина заготовки; r_m – радиус скругления перетяжного ребра матрицы.

Величину удельного усилия q принимают равным:

0,8...1,6 МПа – для алюминиевых сплавов;

около 4 МПа – для стальных сплавов.

Окончательно, напряжение от действия прижима:

$$\frac{P_{\text{пр}}}{\pi \cdot d \cdot S_0} = \frac{2 \cdot f \cdot q}{4\pi \cdot d \cdot S_0} [D_k^2 - (d + S_0 + 2 \cdot r_m)^2] = \sigma_{\text{пр}}. \quad (30.4)$$

Напряжение, обусловленное изгибом заготовки, определяют в соответствии с формулой

$$\sigma_{\text{рас}} = \frac{\sigma_s \cdot S_0}{2 \cdot r_m + S_0}. \quad (30.5)$$

Для определения напряжения, передающегося вертикальной стенке как следствие деформирования фланцевой части заготовки, надлежит решить дифференциальное уравнение равновесия (12.10):

$$\rho \frac{\partial \sigma_\rho}{\partial \sigma} + \sigma_\rho - \sigma_\theta - \frac{f \cdot \rho}{\sin \alpha} \left(\frac{\sigma_\rho}{R_\rho} + \frac{\sigma_\theta}{R_\theta} \right) = 0.$$

Учитывая, что радиусы кривизны оболочки стремятся к бесконечности для плоского фланца, исходное уравнение, с учетом условия пластичности, существенно упрощается:

$$\sigma_p - \sigma_\theta = \sigma_s; \quad \frac{d\sigma_p}{\sigma_s} = -\frac{d\rho}{\rho}. \quad (30.6)$$

Граничное условие на торце фланца имеет вид

$$\sigma_p|_{R_H} = 0. \quad (30.7)$$

Из уравнения (30.6) интегрированием получаем:

$$\sigma_p = -\sigma_s \ln \rho + C, \quad (30.8)$$

где C – константа, подлежащая определению.

Используя граничное условие (30.7) и решение (30.8), определяем константу интегрирования:

$$\sigma_p|_{R_H} = 0 = -\sigma_s \ln R_H + C; \quad \sigma_p = -\sigma_s \ln \rho + \sigma_s \ln R_H; \quad C = \sigma_s \ln R_H,$$

подстановка которой в решение (30.8) дает:

$$\sigma_p = \sigma_s \ln \frac{R_H}{\rho}. \quad (30.9)$$

Заменяя в формуле (30.3) значения напряжений из формулы (30.9), а радиусы соответствующими диаметрами, получим:

$$\tilde{\sigma}_\Sigma = \sigma_s \ln \frac{D_k}{d} + \sigma_{\text{раз}} + \sigma_{\text{пр}}. \quad (30.10)$$

Очевидно, максимальное значение напряжения (30.10) будет возникать на этапе деформирования, близком к начальному ($D \approx D_0$):

$$\tilde{\sigma}_\Sigma^{\text{max}} = \sigma_s \ln \frac{D_0}{d} + \sigma_{\text{раз}} + \tilde{\sigma}_{\text{пр}}. \quad (30.11)$$

Чтобы учесть $P_{\text{тр}}$, воспользуемся законом Эйлера:

$$\sigma_\Sigma = \tilde{\sigma}_\Sigma^{\text{max}} \cdot e^{f \cdot \alpha} = \sigma_\Sigma^{\text{max}} \cdot e^{f \cdot \frac{\pi}{2}}, \quad (30.12)$$

где α – угол обхвата, равный $\frac{\pi}{2}$.

Полное усилие на пуансоне можно вычислить с учетом значения суммарного напряжения в вертикальной стенке (30.12) таким образом:

$$P_n = \pi \cdot d \cdot S_0 \cdot \sigma_\Sigma. \quad (30.13)$$

В формулу (30.11) можно ввести обозначение:

$$\frac{D_0}{d} = k, \quad (30.14)$$

где k – коэффициент вытяжки, предельные значения которого для различных материалов приводятся в соответствующих справочниках.

Замечание: В справочниках иногда называют коэффициентом вытяжки величину, обратную той, что определена формулой (30.14).

3. Деформационные характеристики фланцевой части можно определить, полагая равенство факторов Лодэ (см. формулу (15.16)) для напряжений и деформаций, а также используя условие несжимаемости:

$$\chi = \frac{\sigma_p - \sigma_n}{\sigma_p - \sigma_n} = \frac{e_p - e_n}{e_p - e_n} \left. \right\} \Rightarrow e_n = \frac{1 + \chi}{\chi - 2} \cdot e_\theta, \quad (30.15)$$

где индексы p , θ и n относятся к радиальным, окружным и нормальным составляющим характеристик напряженно-деформированного состояния соответственно.

С учетом условия пластичности $\sigma_\theta = \sigma_p - \sigma_s$ и формулы (30.9), из (30.15) получаем:

$$\chi = \frac{\sigma_s \ln \frac{D_k}{\tilde{d}}}{\sigma_s \ln \frac{D_k}{\tilde{d}} - \sigma_s} = \frac{\ln \frac{D_k}{\tilde{d}}}{\ln \frac{D_k}{\tilde{d}} - 1}, \quad (30.16)$$

где $\tilde{d} = 2 \cdot \rho$ – текущее значение координаты на фланцевой части.

Логарифмические деформации по толщине заготовке и в окружном направлении соответственно определяются соотношениями:

$$e_n = \ln \left(\frac{S}{S_0} \right), \quad e_\theta = \ln \left(\frac{\tilde{d}}{D_0} \right). \quad (30.17)$$

где S – текущее значение толщины заготовки.

Окружные деформации легко подсчитать, производя соответствующие замеры линейных величин. **Нормальные деформации** (по толщине фланца) определяются соотношением (30.15), а **радиальные деформации** можно вычислить, используя условие несжимаемости. В любой произвольной точке можно определить изменение толщины во фланце:

$$e_n(\tilde{d}) = e_n = \frac{1 + \chi}{\chi - 2} \cdot e_\theta. \quad (30.18)$$

Особенно просто это сделать на торце заготовки, когда происходит ее вытяжка в стакан ($\tilde{d} = d$).

$$\sigma_p = 0 \Rightarrow \chi = 0 \Rightarrow e_n = -\frac{1}{2} e_\theta; \quad \ln \frac{S_{\max}}{S_0} = -\frac{1}{2} \ln \frac{d}{D_0}.$$

$$S_{\max} = S_0 \frac{1}{\sqrt{d/D_0}} = S_0 \sqrt{D_0/d} = S_0 \sqrt{K_B}, \quad (30.19)$$

где K_B – коэффициент вытяжки; S_{\max} – толщина на торце заготовки.

4. Естественным ограничением, накладываемым на процесс вытяжки, является **отсутствие пластической деформации вертикальной стенки** заготовки (детали). В противном случае происходит разрыв по стенке заготовки или отрыв донной части, что зависит от степени упрочнения материала и режимов процесса, например, от величины радиуса скругления пуансона. Указанное условие с учетом формулы (30.12) можно представить в виде

$$\sigma_{\Sigma} < \sigma_s. \quad (30.20)$$

Если, к тому же, положить $\mathbf{f} = \mathbf{0}$, $r_m \gg S_0$, то в предельном случае, напряжение в вертикальной стенке будет равным напряжению от деформирования фланцевой части заготовки, а соотношение (30.20) с учетом решения (30.9) примет вид

$$\ln(k) < 1; k < e = 2,7. \quad (30.21)$$

В реальности же, например, для сталей, $k < 1,82$. Соответствующие предельные коэффициенты вытяжки можно найти в справочниках, где они приведены в зависимости от **толщины заготовки, высоты детали, ее конструкции и свойств материала**. Существуют и другие виды ограничений, например, **кромковая волнистость** фланца, устраняемая отчасти прижимом, или так называемые «уши» (**фестоны**) на фланцевой части заготовки, возникающие вследствие анизотропии исходной заготовки.

Контрольные вопросы и упражнения

1. Изобразите схему вытяжки заготовки.
2. Какие знаки имеют радиальные и окружные напряжения во фланце?
3. Перечислите пять допущений, принятых при рассмотрении вытяжки.
4. Как формулируется постановка задачи при рассмотрении процесса вытяжки?
5. На основе качественного описания предельных состояний в трех замечаниях приведите эти описания к количественным соотношениям для стали 08кп на основе справочных материалов.
6. Из каких составляющих складывается полное усилие на пуансоне?
7. Как осуществляют переход к напряжениям в вертикальной стенке заготовки?
8. Каково значение удельного усилия прижима для алюминиевых и стальных сплавов?
9. Получите значение напряжений от действия прижима.
10. Как находят напряжения, обусловленные изгибом заготовки?
11. Как редуцируется уравнение равновесия осесимметричной заготовки для случая фланца?
12. В каком виде формулируется условие пластичности для задачи деформирования фланца?
13. Как формулируется граничное условие на торце фланца?
14. Решите дифференциальное уравнения равновесия для фланца.
15. Запишите формулу определения полного усилия на пуансоне через напряжение в вертикальной стенке.
16. Как определяется коэффициент вытяжки, от каких параметров он зависит?
17. На основе какого предположения устанавливается связь нормальной и окружной деформации?
18. Сделайте вывод зависимости нормальной и окружной деформации.
19. Установите зависимость χ от геометрических параметров.

20. Укажите зависимости логарифмических нормальных и окружных деформаций от геометрических параметров.
21. Дайте вывод формулы для определения толщины заготовки на торце.
22. Сформулируйте ограничение на процесс вытяжки.
23. Как определить коэффициент вытяжки для случая отсутствия трения без учета разгибки заготовки на ребре матрицы?
24. От каких параметров зависит предельный коэффициент вытяжки?
25. Какие дефекты возникают при вытяжке и как они устраняются?

Лекция 31. Вытяжка с утонением стенки

=====

1. Описание и анализ процесса. 2. Выбор метода и схематизация задачи. 3. Определение работ и деформирующих усилий. 4. Оптимальные параметры процесса.

=====

1. Вытяжка с утонением – процесс вытяжки, в котором зазор между пуансоном и матрицей заведомо меньше толщины заготовки. Схема процесса приведена на рис. 31.1.

Особенности данной операции:

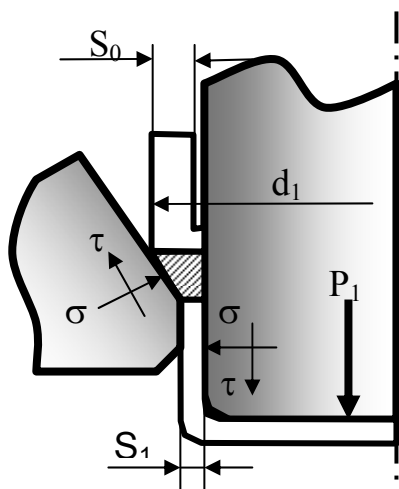


Рис. 31.1. Схема вытяжки с утонением стенки

1. Значительные нормальные напряжения на контактных поверхностях. 2. Различное направление сил трения на внутренней и наружной поверхностях. 3. Малые размеры очага деформации по сравнению с размерами заготовки. 4. Схема напряженного состояния в очаге деформации является разноименной. 5. Касательные напряжения на контактных поверхностях существенно меньше предельного касательного напряжения k . 6. Различия в направлениях главного и контактного напряжений незначительны (в пределах 6°). 7. Деформированное состояние близко к условиям плоской деформации, поскольку окружная деформация наружных волокон $\varepsilon_d = \frac{2 \cdot (S - S_0)}{d_1} < 0,1$, а

средняя по очагу окружная деформация не превышает величины 0,05.

2. Для определения энергосиловых параметров процесса необходимо определение полей напряжений в очаге деформации. Данная задача решалась различными методами: инженерным (Сторожев М. В.), методом линий скольжения (Шофман Л. А.), методом баланса работ (Ренне И. П.).

Последний метод является предпочтительным ввиду учета различия смещения материала в формуле работы силы трения, в то время как первые два метода, основанные на интегрировании уравнений статистического равновесия, этот эффект учесть не могут.

Задача состоит в определении напряжений σ_z , действующих в стенке протянутой части заготовки при установившемся процессе. Схема очага и принятые обозначения приведены на рис. 31.2.

3. Метод баланса работ основан на равенстве (см. лекцию 23.):

$$\mathbf{A}_i = \mathbf{A}_a - \mathbf{A}_f, \quad (31.1)$$

где A_i – работа внутренних сил; A_a – работа активных сил; A_f – работа сил трения.

Работу сил трения можно отнести к матрице и пуансону:

$$\mathbf{A}_f = \mathbf{A}_{fm} - \mathbf{A}_{fp}, \quad (31.2)$$

а работу деформации представить в виде

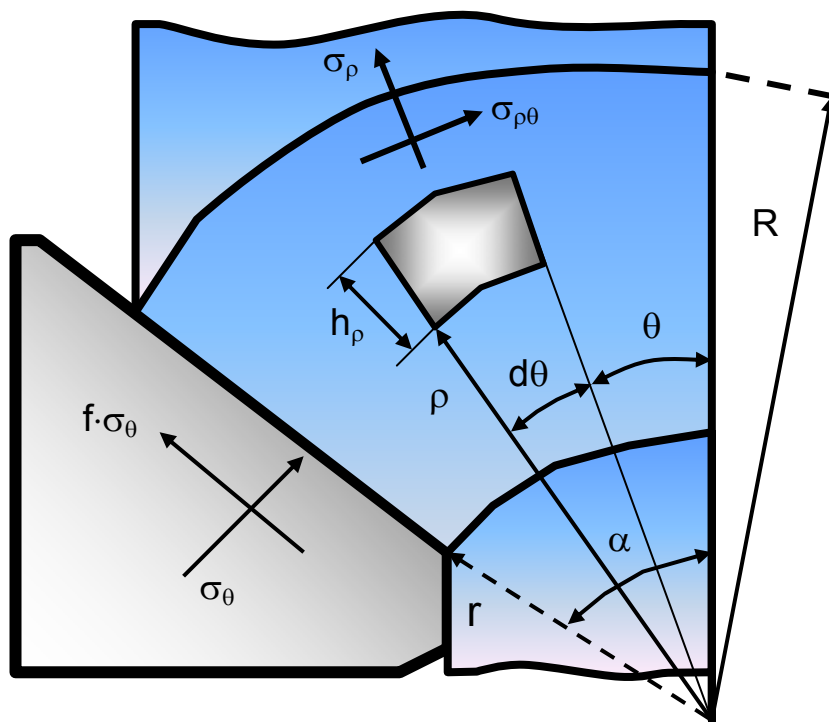


Рис. 31.2. Очаг пластической деформации

$$\mathbf{A}_i = \mathbf{A}_{\tau R} + \mathbf{A}_{\tau r} + \mathbf{A}_{\sigma}, \quad (31.3)$$

где $A_{\tau R}$ – работа деформации на верхней границе ($\rho = R$); $A_{\tau r}$ – работа деформации на нижней границе ($\rho = r$); A_{σ} – работа в очаге деформации.

Учет влияния верхней и нижней границ обусловлен значительными деформациями сдвига и касательными напряжениями вблизи них, в то время как в средней части заготовки эти параметры близки к нулю. Будем считать что на границе $\sigma_{\rho\theta} = \sigma_s/2$. Пусть пуансон перемещается на величину h . Тогда кольцевой пояс у нижней границы вследствие условия несжимаемости будет иметь ту же площадь:

$$\mathbf{S}_1 \cdot \mathbf{h} = \mathbf{r} \cdot \alpha \cdot \mathbf{h}_r, \quad (31.4)$$

где h_r – высота пояса у нижней границы.

Так как $S_1 = r \cdot \sin \alpha$, то из (31.4) следует:

$$h_p = \frac{\sin \alpha}{\alpha} \cdot h = \{\sin \alpha \approx \alpha\} \approx h. \quad (31.5)$$

Для произвольного радиуса ρ :

$$h_p = \frac{r}{\rho} \cdot h_r, \quad (31.6)$$

в частности, при $\rho = R$ получаем:

$$h_R = \frac{r}{R} \cdot h_r. \quad (31.7)$$

Формулы (31.5) – (31.7) определяют смещение точек заготовки по отношению к смещению материальных точек на уровне нижней границы.

Работа деформации A_σ определяется уравнением:

$$A_\sigma = \iiint_V \sigma_i \cdot d\varepsilon_i \cdot dV. \quad (31.8)$$

Будем считать:

$$\sigma_i = \sigma_s; \quad d\varepsilon_i = d\varepsilon_\theta = \frac{h_p}{\rho} = \frac{r}{\rho^2} \cdot h_r.$$

Относя расчеты к единичной толщине в окружном направлении, имеем:

$$dV = \rho \cdot \alpha \cdot d\rho.$$

Подставляя эти значения в (31.8), получим:

$$A_\sigma = \sigma_s \cdot \alpha \cdot r \cdot h_r \cdot \int_r^R \frac{d\rho}{\rho} = \sigma_s \cdot \alpha \cdot r \cdot h_r \cdot \ln \frac{R}{r}. \quad (31.9)$$

Работа касательных напряжений на границах $A_{\tau R}$ и $A_{\tau r}$ определяется действием элементарных сил $\frac{1}{2} \cdot \sigma_s \cdot R \cdot d\theta$ и $\frac{1}{2} \cdot \sigma_s \cdot r \cdot d\theta$ на верхней и нижней границах соответственно. Пути, на которых работают эти силы, равны $h_R \cdot \operatorname{tg}\theta = h_r \cdot \frac{r}{R} \cdot \operatorname{tg}\theta$ и $h_r \cdot \operatorname{tg}\theta$ соответственно.

Тогда

$$A_{\tau R} = \int_0^\alpha \frac{1}{2} \cdot \sigma_s \cdot h_r \cdot \frac{r}{R} \cdot \operatorname{tg}\theta \cdot R \cdot d\theta = -\frac{\sigma_s}{2} \cdot r \cdot h_r \cdot |\ln \cos \theta|_0^\alpha; \quad (31.10)$$

$$A_{\tau r} = -\frac{\sigma_s}{2} \cdot r \cdot h_r \cdot \ln \left(1 - 2 \sin^2 \frac{\alpha}{2} \right) \approx \sigma_s \cdot r \cdot h_r \cdot \sin^2 \frac{\alpha}{2}.$$

Аналогичные вычисления для нижней границы дают:

$$\mathbf{A}_{\text{тр}} = \int_0^{\alpha} \frac{\sigma_s}{2} \cdot r \cdot h_r \cdot \text{tg}\theta \cdot d\theta \approx \sigma_s \cdot r \cdot h_r \cdot \sin^2 \frac{\alpha}{2} . \quad (31.11)$$

Перед вычислением работы сил трения на контактных поверхностях определим элементарную силу, действующую на контактной поверхности. Решение уравнения равновесия с условием пластичности $\sigma_\rho - \sigma_\theta = \sigma_s$ дает (см. также лекцию 29):

$$\sigma_\theta = -\sigma_s \cdot \left(1 - \ln \frac{R}{\rho}\right). \quad (31.12)$$

Тогда элементарная сила трения на контактных поверхностях определяется соотношением:

$$\mathbf{f} \cdot \sigma_\theta \cdot d\rho = \mathbf{f} \cdot \sigma_s \cdot \left(1 - \ln \frac{R}{\rho}\right) \cdot d\rho . \quad (31.13)$$

Знак напряжения σ_θ из (31.12) не следует учитывать в (31.13), поскольку знак силы трения определяется знаком смещения точки деформации тела в контактной зоне.

Работа A_{fm} определяется таким образом:

$$\mathbf{A}_{\text{fm}} = \int_r^R \mathbf{f} \cdot \sigma_s \cdot \left(1 - \ln \frac{R}{\rho}\right) \cdot h_p \cdot d\rho ,$$

или с учетом (31.6) после интегрирования:

$$\mathbf{A}_{\text{fm}} = \mathbf{f} \cdot \sigma_s \cdot r \cdot h_r \cdot \left(1 - \ln \frac{R}{r}\right) \cdot \ln \frac{R}{r} . \quad (31.14)$$

Работа A_{fp} хотя и производится той же элементарной силой, однако перемещение в этом случае равно $h_p - h$ или в силу (31.5):

$$\Delta = h_p - h_p = \left(\frac{r}{\rho} - 1\right) \cdot h_r . \quad (31.15)$$

$$\mathbf{A}_{\text{fm}} = \int_r^R \mathbf{f} \cdot \sigma_s \cdot \Delta \cdot d\rho = -\frac{1}{2} \cdot \mathbf{f} \cdot \sigma_s \cdot r \cdot h_r \cdot \left(\ln \frac{R}{r}\right)^2 . \quad (31.16)$$

Работа активных сил A_a на основании (31.1) – (31.3) равна сумме найденных работ (31.9) – (31.11), (31.14) и (31.16), или после проведения некоторых упрощений:

$$\mathbf{A}_a = \sigma_s \cdot r \cdot h_r \cdot \left[\alpha \cdot \ln \frac{R}{r} + 2 \cdot \sin^2 \frac{\alpha}{2} + \mathbf{f} \cdot \left(1 - \ln \frac{R}{r}\right) \cdot \ln \frac{R}{r} \right] . \quad (31.17)$$

С другой стороны:

$$\mathbf{A}_a = \sigma_z \cdot r \cdot \sin(\alpha) \cdot h, \quad \text{или}$$

$$\mathbf{A}_a = \sigma_z \cdot r \cdot \sin(\alpha) \cdot \frac{\alpha}{\sin \alpha} \cdot h_r = \sigma_z \cdot r \cdot \alpha \cdot h_r. \quad (31.18)$$

Сравнение (31.17) и (31.18), с учетом замены $\sin \frac{\alpha}{2} \approx \frac{\alpha}{2}$, дает:

$$\sigma_z = \sigma_s \cdot \left[\ln \frac{R}{r} + \frac{\alpha}{2} + \frac{f}{\alpha} \cdot \left(1 - \ln \frac{R}{r} \right) \cdot \ln \frac{R}{r} \right]. \quad (31.19)$$

Производя замену из очевидного соотношения $R/r = S_0/S$ в формуле (31.19), получим окончательно:

$$\sigma_z = \sigma_s \cdot \left[\ln \frac{S_0}{S} + \frac{\alpha}{2} + \frac{f}{\alpha} \cdot \left(1 - \ln \frac{S_0}{S} \right) \cdot \ln \frac{S_0}{S} \right]. \quad (31.20)$$

4. Зависимость напряжения (31.20) от угла α позволяет определить такое значение последнего, когда напряжение, а следовательно, усилие, будет минимально:

$$\frac{d\sigma_z}{d\alpha} = 0. \quad (31.21)$$

Из (31.21) получаем оптимальное значение угла α_{opt} :

$$\alpha_{opt} = \sqrt{2 \cdot f \cdot \left(1 - \ln \frac{S_0}{S_1} \right) \cdot \ln \frac{S_0}{S_1}}. \quad (31.22)$$

Формула (31.22) не содержит диаметра заготовки, что обусловлено принятым допущением о плоском деформированном состоянии. Максимальное значение правой части (31.22) достигается при $S_0/S_1=1,65$, а диапазон этого соотношения лежит в пределах $1 \leq S_0/S_1 \leq e$. Последняя оценка является математической. Реальный диапазон этих значений существенно уже. Отметим, что формула (31.20) не является вполне асимптотически корректной, и при определении параметров реального процесса следует адресоваться к справочникам, хотя и приведенное решение можно использовать в качестве первого приближения. Данная задача решена также методом линий скольжений и методом верхней оценки; решения хорошо согласуются с экспериментальными данными.

Контрольные вопросы и упражнения

1. Дайте определение вытяжки с утонением.
2. Перечислите особенности вытяжки с утонением.
3. Выполните схему вытяжки с утонением.
4. Как определяется окружная деформация при вытяжке в условиях плоской деформации.
5. Назовите методы, применяемые для анализа вытяжки с утонением и поясните причину, по которой один из них является предпочтительным.
6. Запишите формулу метода баланса работ.
7. Как учитывают работу сил трения на матрице и пуансоне?
8. В каком виде можно представить работу деформации?
9. Запишите формулу смещения точек заготовки.
10. Сделайте вывод формулы работы касательных напряжений для верхней и нижней границ.
11. Сделайте вывод формулы окружных напряжений с использованием уравнения равновесия.
12. Запишите формулу элементарной силы трения на контактных поверхностях.
13. Сделайте вывод формулы работы активных сил.
14. Сделайте вывод формулы напряжения в направлении движения пуансона.
15. Произведите минимизацию напряжений и определите оптимальный угол.
16. При каком соотношении толщин стенок достигается минимум напряжения в стенке заготовки?

Лекция 32. Отбортовка заготовки с отверстием

=====

1. Схема отбортовки и общая постановка задачи. 2. Напряженное состояние в донной части заготовки. 3. Учет изгиба и контактного трения. Усилия деформирования. 4. Деформации, ограничения и пути интенсификации процесса.

=====

1. Отбортовка – операция листовой штамповки, при которой производят локальную вытяжку материала вблизи отверстия в направлении, нормальном к плоскости листа (рис. 32.1).

В процессе отбортовки элементы заготовки получают **изгиб** в меридиональной плоскости при переходе от плоской части заготовки под пуансоном на его скругленную кромку, а затем **спрямление** при сходе со скругленной кромки пуансона. Радиальное напряжение σ_r изменяется от нуля вблизи кромки отверстия до максимального значения на границе очага деформации с недеформируемой частью заготовки.

Растягивающее окружное напряжение σ_θ является наибольшим, а потому **условие пластичности** имеет вид

$$\sigma_{\theta} = \sigma_s, \quad (32.1)$$

σ_s – предел текучести материала заготовки.

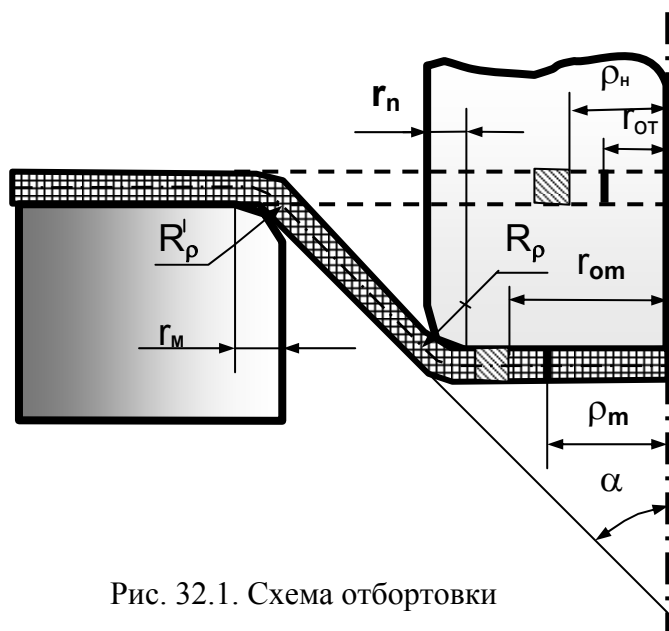


Рис. 32.1. Схема отбортовки

Условно заготовка может быть разбита на три зоны: 1 – зона растяжения под пуансоном; 2 – зона изгиба на ребре пуансона; 3 – зона изгиба на ребре матрицы. Другие зоны можно считать недеформируемыми. Часть заготовки, находящаяся между пуансоном и матрицей, подвергается безусловно меньшей деформации по сравнению с примыкающими зонами, поскольку в них пластическое состояние наступает раньше вследствие изгиба заготовки на ребре пуансона и матрицы.

Общая постановка задачи включает следующие вопросы:

1. Определение напряжений в заготовке и сил, действующих на пуансон. 2. Исчисление деформационных параметров процесса. 3. Определение утонения заготовки и предельных возможностей процесса.

2. Примем следующую процедуру определения силовых параметров отбортовки. Суммарная сила должна учитывать силу от деформирования зоны 1, силы от знакопеременного изгиба заготовки в зонах 2 и 3, а также сил трения на ребре пуансона. Силу трения будем учитывать в соответствии с экспоненциальным законом Эйлера. С учетом этого

$$P_{\Sigma} = (P_1 + P_2 + P_3) \cdot \exp\left(\frac{\pi}{2} \cdot f\right), \quad (32.2)$$

где P_{Σ} – суммарная сила на пуансоне; P_1 – сила деформирования заготовки под пуансоном; P_2 , P_3 – сила изгиба и разгиба заготовки на ребре пуансона и матрицы соответственно; f – коэффициент трения.

Переходя к напряжениям путем деления формулы (32.2) на $S \cdot (d_n + S) \cdot \pi$, получим:

$$\sigma_{\Sigma} = (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) \cdot \exp\left(\frac{\pi}{2} \cdot f\right). \quad (32.3)$$

Отметим, что d_n есть диаметр пуансона, S – толщина заготовки, а напряжения в правой части формулы (32.3) представляют собой

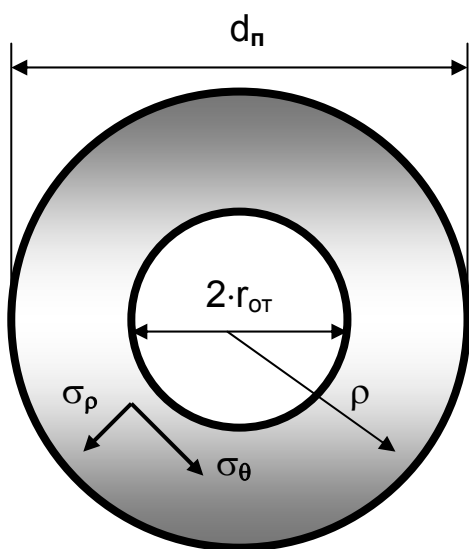


Рис. 32.2. Зона под пуансоном

радиальные напряжения для всех трех выделенных зон. Считая трение отсутствующим в зоне 1, уравнение равновесия (12.10) для осесимметричной заготовки (рис. 32.2) принимает вид уравнения (12.6):

$$\rho \cdot \frac{d\sigma_\rho}{d\rho} + \sigma_\rho - \sigma_\theta = 0, \quad (32.4)$$

которое совместно с условием пластичности (32.1) дает решение:

$$\sigma_\rho = \sigma_s + \frac{C}{\rho}, \quad (32.5)$$

где C – константа интегрирования; ρ – текущая координата.

Используя граничное условие для внутреннего контура заготовки в виде

$$\sigma_\rho(r_{om}) = 0, \quad (32.6)$$

из (32.5) найдем константу интегрирования:

$$C = -\sigma_s \cdot r_{om}. \quad (32.7)$$

Подстановка (32.7) в формулу (32.5) дает:

$$\sigma_1 = \sigma_\rho = \sigma_s \cdot \left(1 - \frac{r_{om}}{\rho}\right). \quad (32.8)$$

В формулах (32.6) – (32.8) величина r_{om} представляет собой текущий радиус отверстия. Из формулы (32.8) следует, что максимальное напряжение возникает на начальном этапе процесса отбортовки, однако максимальное усилие на пуансоне развивается на последующих этапах вследствие наличия изгиба заготовки на ребрах пуансона и матрицы.

3. Напряжения от изгиба и спрямления на ребре пуансона можно учесть как максимальные окружные напряжения в этой зоне:

$$\sigma_2 = \sigma_s \cdot \varepsilon_\theta^{\max} = \sigma_s \cdot \frac{S}{2 \cdot R_p}, \quad (32.9)$$

где R_p – радиус скругления пуансона.

Напряжения от изгиба на ребре матрицы определяют аналогично, с учетом того, что в этом случае спрямления заготовки не происходит:

$$\sigma_3 = \sigma_s \cdot \frac{S}{4 \cdot R_p^1}. \quad (32.10)$$

Подставляя формулы (32.8) – (32.10) в зависимость (32.3), получим:

$$\sigma_\Sigma = \sigma_s \cdot \left(1 - \frac{r_{om}}{\rho} + \frac{S}{2 \cdot R_p} + \frac{S}{4 \cdot R_p^1}\right) \cdot \exp\left(\frac{\pi}{2} \cdot f\right). \quad (32.11)$$

Максимальное значение напряжения (32.11) достигается при $r_{om} = r_{от}$, $\rho = (d_n + S)/2 = R$. Умножение максимального напряжения (32.11) на площадь сечения заготовки $S \cdot (d_n + S) \cdot \pi$ дает усилие отбортовки:

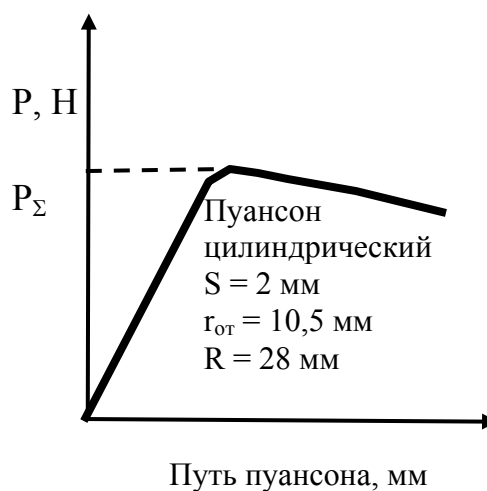


Рис. 32.3. Усилие отбортовки

$$P_{\Sigma} \approx \sigma_s \cdot \left(1 - \frac{r_{от}}{R} + \frac{S}{2 \cdot R_{\rho}} + \frac{S}{4 \cdot R_{\rho}^I} \right) \cdot \exp\left(\frac{\pi}{2} \cdot f\right) \cdot S \cdot (d_{II} + S) \cdot \pi. \quad (32.12)$$

В общем случае усилие на пуансоне при отбортовке зависит от этапа деформирования (рис. 32.3). Формулу (32.12) можно применять для выбора технологического оборудования по развиваемому усилию.

Отношение радиуса исходного отверстия к радиусу отверстия после отбортовки в формуле (32.12) называют коэффициентом **отбортовки**:

$$k_{от} = \frac{r_{от}}{R}. \quad (32.13)$$

На практике предельный коэффициент отбортовки зависит от ряда факторов: **толщины заготовки, материала, технологии изготовления отверстия, технологических условий реализации процесса**, включая радиусы скругления пуансона и матрицы, смазку и т. п.; значения предельных коэффициентов отбортовки приводятся в справочниках по листовой штамповке.

4. Окружную деформацию заготовки под пуансоном найдем, используя определение логарифмической деформации:

$$e_{\theta} = -\ln\left(\frac{r_{om}}{\rho}\right). \quad (32.14)$$

Другие деформации можно определить, полагая равенство факторов Лоде (см. формулу (15.16)) для напряжений и деформаций, а также используя условие несжимаемости:

$$\chi = \left. \begin{aligned} \frac{\sigma_{\rho} - \sigma_n}{\sigma_{\theta} - \sigma_n} = \frac{e_{\rho} - e_n}{e_{\theta} - e_n} \end{aligned} \right\} \Rightarrow e_n = \frac{1 + \chi}{\chi - 2} \cdot e_{\theta}, \quad (32.15)$$

где индексы ρ , θ и n относятся к радиальным, окружным и нормальным составляющим характеристик напряженно-деформированного состояния соответственно.

С учетом условия пластичности (32.1) и формулы (32.8), из (32.15), считая нормальное напряжение малым, получаем:

$$\chi = 1 - \frac{r_{om}}{\rho}. \quad (32.16)$$

Таким образом, уравнения (32.14) – (32.16) и условие постоянства объема позволяют определить все главные деформации.

С другой стороны, **логарифмическая деформация** в окружном направлении определяется формулой (32.14), а деформация по толщине заготовке – соотношением

$$e_n = \ln\left(\frac{S_{тек}}{S}\right). \quad (32.17)$$

где $S_{тек}$ – текущее значение толщины заготовки.

В любой произвольной точке отбортованного участка можно определить текущую толщину из уравнения:

$$\ln\left(\frac{S_{\text{тек}}}{S}\right) = e_n = \frac{1+\chi}{\chi-2} \cdot e_\theta. \quad (32.18)$$

Особенно просто это сделать вблизи торца заготовки:

$$\begin{aligned} \sigma_p = 0 \Rightarrow \chi = 0 \Rightarrow e_n = -\frac{1}{2} e_\theta; \quad \ln \frac{S_{\text{тек}}}{S} = \frac{1}{2} \ln \frac{r_{\text{от}}}{R}. \\ S_{\text{тек}} = S \cdot \sqrt{r_{\text{от}}/R} = S \cdot \sqrt{k_{\text{от}}}, \end{aligned} \quad (32.19)$$

где $k_{\text{от}}$ – коэффициент отбортовки.

На основании формулы (32.19) легко определить и **относительное утонение** заготовки вблизи торца заготовки.

Как уже указывалось, **предельные возможности** отбортовки существенно зависят от технологических особенностей процесса. Так, при отбортовке отверстия цилиндрическим пуансоном с малым радиусом скругления в деталях может возникать бочкообразный поясок. Увеличение радиуса скругления пуансона или замена цилиндрического пуансона на сферический (или пуансон с криволинейной поверхностью) устраняет данный дефект. Глубокую отбортовку можно получить с использованием промежуточного отжига или обсечки внутреннего контура на межопера-ционном переходе, хотя это и повышает технологические затраты на изготовление детали. Расположение заготовки относительно матрицы должно быть таким, чтобы блестящий поясок от выреза отверстия был бы обращен к матрице, что снижает вероятность появления трещин на торце заготовки на финальной стадии процесса.

Контрольные вопросы и упражнения

1. Дайте определение операции отбортовки.
2. Изобразите схему отбортовки.
3. Дайте описание хода процесса отбортовки.
4. Дайте перечень дефектов и вероятные причины их возникновения при отбортовке, основываясь на логическом анализе процесса.
5. Изобразите расположение напряжений в донной части заготовки и опишите их изменение в процессе деформирования заготовки.
6. Запишите условие пластичности для донной части заготовки, дайте пояснения.
7. Укажите зоны условного разбиения заготовки.
8. Сформулируйте общую постановку задачи отбортовки отверстия.
9. Запишите общую формулу определения усилия на пуансоне в терминах входящих сил.
10. Как осуществляют переход к напряжениям от силовых факторов?
11. Запишите уравнение равновесия для зоны под пуансоном.

12. Выполните интегрирование уравнения равновесия совместно с условием пластичности.
13. Запишите граничное условие для донной части заготовки и дайте надлежащие пояснения.
14. Получите значение радиального напряжения в окончательном виде с использованием граничного условия.
15. Запишите формулу добавочного напряжения от изгиба и спрямления на ребре пуансона.
16. Как учесть в суммарном напряжении влияние изгиба заготовки на ребре матрицы?
17. Запишите закон трения Эйлера.
18. При каких условиях достигается максимальное значение суммарного напряжения?
19. Запишите формулу полного усилия с использованием значения максимального суммарного напряжения.
20. На каком этапе деформирования усилие на пуансоне будет максимальным? Изобразите примерный график изменения усилия на пуансоне от его перемещения.
21. Дайте определение коэффициента отбортовки.
22. От каких факторов зависит предельный коэффициент отбортовки?
23. Как определяется окружная деформация в донной части заготовки?
24. Установите связь окружной и нормальной деформаций, исходя из равенства факторов Лодэ для напряжений и деформаций и условия несжимаемости.
25. Выразите радиальную деформацию через окружную.
26. Запишите логарифмическую деформацию по толщине заготовки в донной части.
27. Дайте вывод зависимости текущей толщины заготовки от текущей радиальной координаты.
28. Сделайте вывод формулы для определения относительного утонения заготовки вблизи торца.
29. Как влияют свойства материала на предельный коэффициент вытяжки?
30. Укажите пути предотвращения возникновения бочкообразного пояса при отбортовке.
31. Как можно получить глубокую отбортовку, не изменяя конструкции инструмента?
32. Как влияет способ выполнения отверстия на предельные возможности процесса отбортовки; как следует располагать заготовку относительно формирующего инструмента для повышения качества детали?

Лекция 33. Обжим в конической матрице

1. Схема обжима и общая постановка задачи. 2. Напряженное состояние и усилие деформирования. 3. Деформации и ограничения при обжиме.

1. Обжим – операция, предназначенная для уменьшения поперечных размеров краевой части полой цилиндрической заготовки. При обжиме заготовка заталкивается в воронкообразную рабочую полость (рис. 33.1), где краевая (концевая) часть заготовки подвергается обжиму (редуцированию): диаметр заготовки уменьшается от значения $2R_3$ до значения $2r_0$. Заготовку условно можно разбить на **три зоны**: I – контактная зона; II – зона изгиба; III – пластически недеформируемая зона. Здесь рассматривается установившееся пластическое течение без анализа этапа первоначального контакта инструмента и заготовки.

Этот этап исследован З. Марчиняком, который показал, что на начальном этапе заготовка может изгибаться во внутрь и отходить от стенок матрицы. Приравняв момент внутренних сил и внешний момент, он показал, что **протяженность концевой участка L**, выходящего из контакта с матрицей к моменту начала установившегося течения, составляет величину:

$$L = \sqrt{\frac{S \cdot r_0}{2 \cdot \cos \alpha}}, \quad (33.1)$$

где S – толщина стенок заготовки; r_0 – радиус выходной части заготовки; α – угол конуса матрицы.

Далее имеет место этап полного контакта заготовки и инструмента в зоне I (установившееся течение), что является предметом рассмотрения в данной лекции.

Общая постановка задачи: 1. Определить возникающие напряжения в недеформированной части заготовки и потребное усилие проталкивания заготовки в матрицу. 2. Определение деформационных характеристик и выявление предельных возможностей процесса.

2. Рассмотрим последовательно выделенные на рис. 33.1 зоны. **В зоне I** (очаге деформации) для определения действующих напряжений (рис. 33.2) необходимо решить **уравнение равновесия** осесимметричной заготовки:

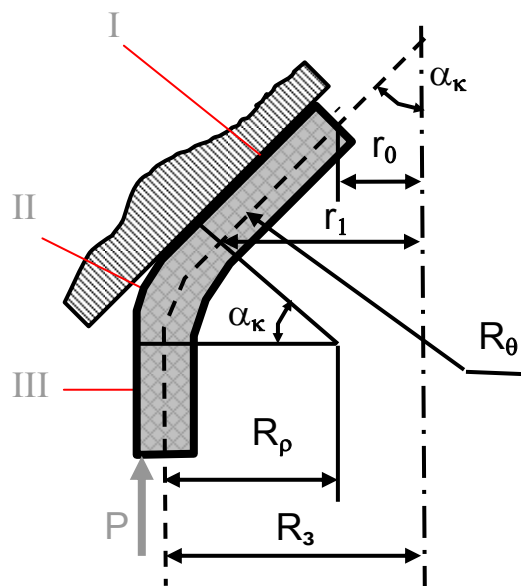


Рис. 33.1. Схема обжима трубчатой заготовки

$$\rho \frac{\partial \sigma_\rho}{\partial \rho} + \sigma_\rho - \sigma_\theta - \frac{f \cdot \rho}{\sin \alpha} \left(\frac{\sigma_\rho}{R_\rho} + \frac{\sigma_\theta}{R_\theta} \right) = 0, \quad (33.2)$$

где ρ – текущее значение координаты; f – коэффициент трения; α – угол конуса матрицы; R_θ – радиус кривизны в окружном направлении; R_ρ – радиус кривизны заготовки в меридиональном направлении.

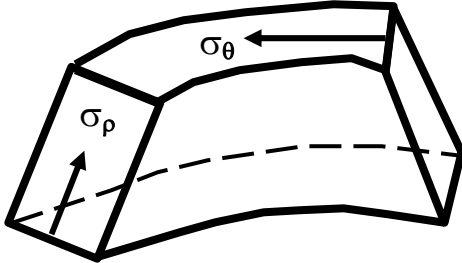


Рис. 33.2. Расположение компонент напряжений в очаге деформаций

В соответствии с рис. 33.1 обозначим:

$$\alpha = \alpha_k; \quad R_\theta = \frac{\rho}{\cos \alpha_k}. \quad (33.3)$$

Вдоль меридиана кривизна отсутствует, поэтому $R_\rho = \infty$. Условие пластичности имеет вид

$$\sigma_\theta = -\sigma_s. \quad (33.4)$$

Вид условия пластичности (33.4) обусловлен тем, что окружное напряжение

является **максимальным и сжимающим**.

Уравнение равновесия (33.2) с учетом соотношений (33.3) и (33.4) преобразуется к виду

$$\rho \frac{d\sigma_\rho}{d\rho} + \sigma_\rho + \sigma_s + f\sigma_s \operatorname{ctg} \alpha_k = 0. \quad (33.5)$$

Дифференциальное уравнение (33.5) является уравнением с разделяющимися переменными и легко интегрируется:

$$\sigma_\rho + \sigma_s + f \cdot \sigma_s \cdot \operatorname{ctg} \alpha_k = \frac{c}{\rho}, \quad (33.6)$$

где c – константа интегрирования.

Из нулевого граничного условия ($\sigma_\rho = 0$ при $\rho = r_0$) несложно найти постоянную интегрирования:

$$c = r_0 \cdot \sigma_s \cdot (1 + f \cdot \operatorname{ctg} \alpha_k). \quad (33.7)$$

Подстановка константы интегрирования (33.7) в формулу (33.6) дает:

$$\sigma_\rho^{(1)} = -\sigma_s \cdot (1 + f \cdot \operatorname{ctg} \alpha_k) \cdot \left(1 - \frac{r_0}{\rho} \right). \quad (33.8)$$

Очевидно, на границе зон I и II ($\rho = r_1$):

$$\sigma_\rho^{(1)}|_{r_1} = -\sigma_s \cdot (1 + f \cdot \operatorname{ctg} \alpha_k) \cdot \left(1 - \frac{r_0}{r_1} \right). \quad (33.9)$$

В зоне II ввиду отсутствия трения (заготовка и инструмент не контактируют) $f = 0$, а уравнение равновесия принимает вид

$$\rho \frac{d\sigma_\rho}{d\rho} + \sigma_\rho - \sigma_\theta = 0. \quad (33.10)$$

Применяя условие пластичности, из (33.10) получим:

$$\rho \frac{d\sigma_p}{d\rho} + \sigma_p + \sigma_s = 0, \quad \frac{d\sigma_p}{\sigma_p + \sigma_s} = -\frac{d\rho}{\rho}; \Rightarrow \sigma_p^{(II)} = -\sigma_s + \frac{C}{\rho}. \quad (33.11)$$

Граничное условие для зоны II должно определяться исходя из значения $\sigma_p^{(II)}$ на границе при $\rho = r_1$ с учетом добавки компоненты радиального напряжения от изгиба заготовки в среднем.

$$\sigma_p^{(II)}(r_1) = \sigma_p^{(I)}(r_1) + \Delta\sigma_p^{\text{изгиба}}, \quad (33.12)$$

где $\Delta\sigma_p^{\text{изгиба}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sigma_s \cdot s}{2 \cdot R_p'}$; R_p' – усредненное значение радиуса в зоне II.

Удовлетворим граничному условию решения (33.11) в зоне II, используя приближенное граничное условие (33.12):

$$\sigma_p^{(II)} \Big|_{\rho=r_1} = \sigma_p^{(II)}(r_1). \quad (33.13)$$

Из формулы (33.13) следует:

$$\begin{aligned} \frac{C}{r_1} - \sigma_s &= -\sigma_s (1 + f \cdot \text{ctg}\alpha_k) \left(1 - \frac{r_0}{r_1}\right) + \frac{1}{4} \frac{\sigma_s \cdot s}{R_p'}; \\ C &= \left[-\sigma_p (1 + f \cdot \text{ctg}\alpha_k) \left(1 - \frac{r_0}{r_1}\right) + \frac{1}{4} \frac{\sigma_s \cdot s}{R_p'} + \sigma_s \right] \cdot r_1. \end{aligned} \quad (33.14)$$

Подстановка (33.14) в решение (33.11) дает решение для зоны II:

$$\sigma_p^{(II)} = \sigma_s \frac{r_1}{\rho} \left\{ 1 - (1 + f \cdot \text{ctg}\alpha_k) \left(1 - \frac{r_0}{r_1}\right) + \frac{1}{4} \frac{s}{R_p'} \right\} - \sigma_s. \quad (33.15)$$

В зоне III напряжение может быть получено как значение напряжения в зоне II при $\rho = R_3$:

$$\sigma_p^{(III)} = \sigma_s \frac{r_1}{R_3} \left\{ 1 - (1 + f \cdot \text{ctg}\alpha_k) \left(1 - \frac{r_0}{r_1}\right) + \frac{1}{4} \frac{s}{R_p'} \right\} - \sigma_s. \quad (33.16)$$

Пусть $r_1 \approx R_3$, тогда решение (33.16) переходит в следующее:

$$\sigma_p^{(III)} = \sigma_s \left\{ 1 - (1 + f \cdot \text{ctg}\alpha_k) \cdot \left(1 - \frac{r_0}{R_3}\right) + \frac{1}{4} \frac{s}{R_p'} \right\} - \sigma_s. \quad (33.17)$$

Введем обозначение члена в правой части решения (33.17) с учетом его практических значений: $\frac{s}{4 \cdot R_p'} = (0,2 \div 0,3) = \xi$.

Тогда **максимальное значение напряжения** в зоне III, используемое для расчета потребного усилия деформирования примет вид

$$\sigma_p^{\text{max}} = -\sigma_s \cdot \left\{ (1 + f \cdot \text{ctg}\alpha_k) \cdot \left(1 - \frac{1}{k_{\text{обж}}}\right) + \xi \right\}. \quad (33.18)$$

В формуле (33.18) введено обозначение **коэффициент обжима**:

$$\frac{r_0}{R_3} = k_{\text{обж}}. \quad (33.19)$$

Значения **предельных коэффициентов обжима** приводятся в справочниках по листовой штамповке и в практическом приложении изучаются в курсе листовой штамповки.

Усилие деформирования заготовки при обжиге может быть вычислено по следующей простой формуле:

$$P = |\sigma_p^{\max}| \cdot 2 \cdot \pi \cdot R_3 \cdot s_0, \quad (33.20)$$

где s_0 – толщина исходной заготовки.

3. Деформационные параметры процесса можно определить из следующих соотношений. **Окружную деформацию** легко найти из геометрических соотношений:

$$e_\theta = \ln \frac{\rho}{R_3}. \quad (33.21)$$

Связь между окружной и нормальной (по толщине стенки) деформацией e_n устанавливается на основании подобия кругов Мора для напряжений и деформаций с учетом условия постоянства объема:

$$\frac{\sigma_p - \sigma_n}{\sigma_\theta - \sigma_n} = \frac{e_p - e_n}{e_\theta - e_n}; \quad e_p = -e_n - e_\theta. \quad (33.22)$$

Вводя обозначение и проводя элементарные преобразования, получим:

$$\chi = \frac{\sigma_p}{\sigma_\theta} = -\frac{2 \cdot e_n + e_\theta}{e_\theta - e_n}; \quad e_\theta \cdot \chi - \chi \cdot e_n = -2 \cdot e_n - e_\theta; \quad e_n = \frac{\chi + 1}{(\chi - 2)} \cdot e_\theta. \quad (33.23)$$

Пренебрегая напряжением по толщине заготовки в (33.23) и принимая в расчет значения напряжений в формулах (33.2) и (33.9), получим:

$$\chi = \frac{-\sigma_s \cdot (1 + f \cdot \text{ctg} \alpha_k) \cdot \left(1 - \frac{r_0}{\rho}\right)}{-\sigma_s} = (1 + f \cdot \text{ctg} \alpha_k) \cdot \left(1 - \frac{r_0}{\rho}\right). \quad (33.24)$$

Итак, все деформации определены в формулах (33.22) – (33.24). Определим толщину заготовки s в очаге деформации:

$$e_z = \ln \frac{s}{s_0}; \quad \ln \frac{s}{s_0} = \ln \left(\frac{\rho}{R_3} \right)^{\frac{\chi+1}{\chi-2}} \Rightarrow s = s_0 \left(\frac{\rho}{R_3} \right)^{\frac{\chi+1}{\chi-2}}. \quad (33.25)$$

Проще всего это сделать для кромки ($\rho = r_0$ и $\chi = 0$, см. формулу (33.25)):

$$s = s_0 \left(\frac{r_0}{R_3} \right)^{-\frac{1}{2}} = \frac{s_0}{\sqrt{k_{\text{обж}}}}. \quad (33.26)$$

Формула (33.25) дает верное значение и для основания обжатой части заготовки, когда $\rho = R_3$: $s = s_0 \left(\frac{1}{1} \right) = s_0$.

Предельные возможности процесса обжима определяются предельными значениями коэффициента обжима, зависящего от толщины и диамет-

ра заготовки, применяемого материала, конструкции технологической оснастки и режимов формообразования. В частности, **оптимальный угол конусности матрицы** составляет величину $\alpha_k = \arcsin \sqrt[3]{f/2}$, полученную аналитически с учетом упрочнения Ю. А. Аверкиевым.

К сожалению, приведенная теория не является универсальной: например, изменение формы матрицы требует применения специального рассмотрения процесса обжима.

Контрольные вопросы и упражнения

1. Дайте определение операции обжима цилиндрической заготовки.
2. Изобразите схему обжима.
3. Покажите на схеме и назовите три зоны, на которые условно можно разбить заготовку.
4. Какое явление наблюдается на начальном этапе контакта заготовки с инструментом.
5. Приведите формулу Марчиняка для протяженности концевой участка.
6. Сформулируйте общую постановку задачи анализа процесса обжима.
7. Покажите расположение меридиональной и окружной составляющих напряжений в первой зоне.
8. Запишите уравнение равновесия осесимметричной заготовки.
9. Чему равны радиусы кривизны заготовки в первой зоне?
10. Как формулируется условие пластичности для первой зоны и чем обусловлен такой выбор условия пластичности?
11. Приведите уравнение равновесия в первой зоне к форме уравнения с разделяющимися переменными.
12. Обоснуйте и сформулируйте граничные условия для уравнения равновесия в первой зоне.
13. Проинтегрируйте уравнение равновесия и найдите его частное решение для первой зоны.
14. Какой вид имеет уравнение равновесия во второй зоне, как оно получается из общего уравнения равновесия осесимметричной оболочки?
15. Проинтегрируйте уравнение равновесия совместно с условием пластичности во второй зоне.
16. Каким образом можно установить приближенное граничное условие для второй зоны? Представьте его в математическом виде.
17. Сделайте необходимые расчеты для определения константы интегрирования для второй зоны.
18. Запишите формулу для определения напряжений во второй зоне.
19. Чему равно напряжение в третьей зоне? Приведите аналитическое выражение напряжения.
20. Какие допущения следует принять для получения максимального напряжения в третьей зоне?
21. Запишите формулу максимального напряжения в третьей зоне.

22. Дайте определение коэффициента обжима.
23. Запишите формулу определения усилия деформирования при обжиме и дайте необходимые пояснения.
24. Как определяют окружную деформацию при обжиме?
25. Какие допущения следует принять для установления связи между нормальной и окружной деформациями?
26. Выполните необходимые преобразования для установления связи между нормальной и окружной деформациями.
27. Сделайте вывод формулы для определения толщины заготовки в произвольной точке очага деформаций.
28. Как можно подсчитать толщину заготовки и утолщение в процентах вблизи кромки?
29. Какие факторы определяют предельные возможности процесса обжима?
30. Зависит ли оптимальный угол конусности матрицы от условий смазки и механических свойств материала?
31. Запишите формулу оптимальной конусности матрицы, полученную Ю. А. Аверкиевым.
32. Изобразите различные виды матриц для процесса обжима, обсудите их достоинства и недостатки; сделайте заключение о возможности применения изложенной в данной лекции теории к производственным процессам с формой инструмента, отличной от конической.

Лекция 34. Раздача трубы на коническом пуансоне

=====

1. Схема раздачи и общая постановка задачи. 2. Напряженное состояние и усилие деформирования. 3. Деформации и ограничения при раздаче.

=====

1. Раздача – технологическая операция, предназначенная для увеличения диаметра краевой части полой цилиндрической заготовки. Различают два способа раздачи: 1) путем внедрения пуансона в заготовку, опирающуюся на плиту; 2) путем протягивания пуансона через заготовку, удерживаемую с помощью предварительно полученного фланца. Первый способ (рис. 34.1) называется *раздачей со сжатием* (применяется в листовой штамповке), а второй – *раздачей с растяжением* (применяется в основном в трубном производстве).

Рассмотрим лишь первый способ с применением конического пуансона. Как и в случае обжима, разобьем заготовку на **три зоны**: I – контактная зона; II – зона изгиба; III – пластически недеформируемая зона (на уровне уровне максимальных деформаций σ_{\max}). Здесь рассматривается установившееся пластическое течение без анализа этапа первоначального контакта инструмента и заготовки.

Общая постановка задачи:

1. Определение возникающих напряжений в недеформированной части заготовки и потребного усилия на пуансоне. 2. Определение деформационных характеристик и выявление предельных возможностей процесса.

2. Рассмотрим последовательно указанные зоны. В зоне I (очаге деформации) для определения действующих напряжений необходимо решить уравнение равновесия осесимметричной заготовки (рис. 34.2):

$$\rho \frac{\partial \sigma_\rho}{\partial \rho} + \sigma_\rho - \sigma_\theta - \frac{f \cdot \rho}{\sin \alpha} \left(\frac{\sigma_\rho}{R_\rho} + \frac{\sigma_\theta}{R_\theta} \right) = 0, \quad (34.1)$$

где ρ – текущее значение координаты; f – коэффициент трения; α – угол конуса матрицы; R_θ – радиус кривизны в окружном направлении; R_ρ – радиус кривизны заготовки в меридиональном направлении.

Введем обозначения:

$$\alpha = \alpha_k; \quad R_\theta = \frac{\rho}{\cos \alpha_k}. \quad (34.2)$$

Вдоль меридиана кривизна отсутствует, поэтому $R_\rho = \infty$. Условие пластичности имеет вид

$$\sigma_\theta = \sigma_s. \quad (34.3)$$

Вид условия пластичности (34.3) определен тем, что окружное напряжение является максимальным и растягивающим.

Уравнение равновесия (34.1) с учетом соотношений (34.2) и (34.3) преобразуется к виду

$$\rho \frac{d\sigma_\rho}{d\rho} + \sigma_\rho - \sigma_s + f \cdot \sigma_s \cdot \operatorname{ctg} \alpha_k = 0. \quad (34.4)$$

Дифференциальное уравнение (34.4) является уравнением с разделяющимися переменными и легко интегрируется:

$$\sigma_\rho - \sigma_s + f \cdot \sigma_s \cdot \operatorname{ctg} \alpha_k = \frac{c}{\rho}, \quad (34.5)$$

где c – константа (постоянная) интегрирования.

Из нулевого граничного условия ($\sigma_\rho = 0$ при $\rho = R_k$) несложно найти постоянную интегрирования:

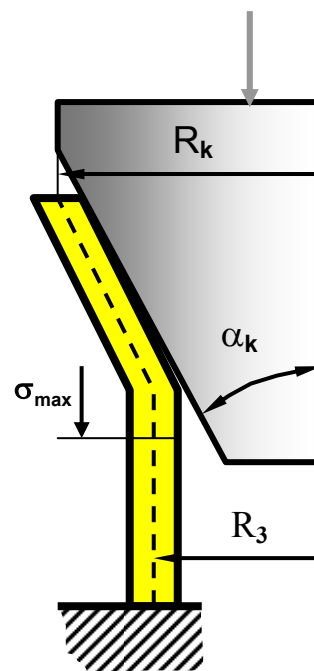


Рис. 34.1 Схема раздачи

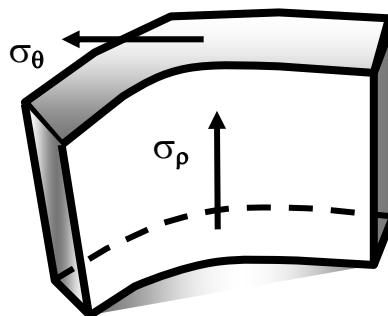


Рис. 34.2. Расположение компонент напряжений в очаге деформаций

$$\mathbf{c} = -\mathbf{R}_k \cdot \sigma_s \cdot (1 - f \cdot \text{ctg} \alpha_k). \quad (34.6)$$

Подстановка константы интегрирования (34.6) в формулу (34.5) дает:

$$\sigma_\rho^{(I)} = \sigma_s \cdot (1 - f \cdot \text{ctg} \alpha_k) \cdot \left(1 - \frac{\mathbf{R}_k}{\rho}\right). \quad (34.7)$$

Очевидно, на границе зон I и II ($\rho = r_1$):

$$\sigma_\rho^{(I)}|_{r_1} = \sigma_s \cdot (1 - f \cdot \text{ctg} \alpha_k) \cdot \left(1 - \frac{\mathbf{R}_k}{r_1}\right). \quad (34.8)$$

В зоне II ввиду отсутствия трения (заготовка и инструмент не контактируют) $f = 0$, а уравнение равновесия принимает вид

$$\rho \frac{d\sigma_\rho}{d\rho} + \sigma_\rho - \sigma_\theta = 0. \quad (34.9)$$

Применяя условие пластичности, из (34.9) получим:

$$\rho \frac{d\sigma_\rho}{d\rho} + \sigma_\rho - \sigma_s = 0, \quad \frac{d\sigma_\rho}{\sigma_\rho - \sigma_s} = -\frac{d\rho}{\rho}; \Rightarrow \sigma_\rho^{(II)} = \sigma_s + \frac{\mathbf{C}}{\rho}. \quad (34.10)$$

Граничное условие для зоны II должно определяться исходя из значения $\sigma_\rho^{(I)}$ на границе при $\rho = r_1$ с учетом добавки компоненты радиального напряжения от изгиба заготовки в среднем.

$$\sigma_\rho^{(II)}(r_1) = \sigma_\rho^{(I)}(r_1) + \Delta\sigma_\rho^{\text{изгиба}}, \quad (34.11)$$

где $\Delta\sigma_\rho^{\text{изгиба}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sigma_s \cdot \mathbf{s}}{2 \cdot \mathbf{R}_\rho}$; \mathbf{R}_ρ – усредненное значение радиуса в зоне II.

Удовлетворим граничному условию решения (34.10) в зоне II, используя приближенное граничное условие (34.11):

$$\sigma_\rho^{(II)}|_{\rho=r_1} = \sigma_\rho^{(II)}(r_1). \quad (34.12)$$

Из формулы (34.12) следует:

$$\begin{aligned} \frac{\mathbf{C}}{r_1} + \sigma_s &= \sigma_s (1 - f \cdot \text{ctg} \alpha_k) \cdot \left(1 - \frac{\mathbf{R}_k}{r_1}\right) + \frac{1}{4} \frac{\sigma_s \cdot \mathbf{s}}{\mathbf{R}_\rho}; \\ \mathbf{C} &= \left[\sigma_\rho (1 - f \cdot \text{ctg} \alpha_k) \cdot \left(1 - \frac{\mathbf{R}_k}{r_1}\right) + \frac{1}{4} \frac{\sigma_s \cdot \mathbf{s}}{\mathbf{R}_\rho} - \sigma_s \right] \cdot r_1. \end{aligned} \quad (34.13)$$

Подстановка (34.13) в решение (34.10) дает решение для зоны II:

$$\sigma_\rho^{(II)} = -\sigma_s \frac{r_1}{\rho} \left\{ 1 - (1 - f \cdot \text{ctg} \alpha_k) \left(1 - \frac{\mathbf{R}_k}{r_1}\right) - \frac{1}{4} \frac{\mathbf{s}}{\mathbf{R}_\rho} \right\} + \sigma_s. \quad (34.14)$$

В зоне III напряжение может быть получено как значение напряжения в зоне II при $\rho = R_3$:

$$\sigma_\rho^{(III)} = -\sigma_s \frac{r_1}{R_3} \left\{ 1 - (1 - f \cdot \text{ctg} \alpha_k) \left(1 - \frac{\mathbf{R}_k}{r_1}\right) - \frac{1}{4} \frac{\mathbf{s}}{\mathbf{R}_\rho} \right\} + \sigma_s. \quad (34.15)$$

Пусть $r_1 \approx R_3$, тогда решение (34.15) переходит в следующее:

$$\sigma_p^{(III)} = \sigma_s \left\{ (1 - f \cdot \operatorname{ctg} \alpha_k) \cdot \left(1 - \frac{R_k}{R_3} \right) + \frac{1}{4} \frac{s}{R_p} \right\}. \quad (34.16)$$

Введем обозначение члена в правой части решения (34.16) с учетом его практических значений: $\frac{s}{4 \cdot R_p} = (0,2 \div 0,3) = \xi$.

Тогда **максимальное значение напряжения** в зоне III, используемое для расчета потребного усилия деформирования, примет вид

$$\sigma_p^{\max} = \sigma_s \cdot \left\{ (1 - f \cdot \operatorname{ctg} \alpha_k) \cdot (1 - k_{\text{разд}}) + \xi \right\}. \quad (34.17)$$

В формуле (34.17) введено обозначение **коэффициента раздачи**:

$$\frac{R_k}{R_3} = k_{\text{разд}}. \quad (34.18)$$

Значения **предельных коэффициентов раздачи** приводятся в справочниках по листовой штамповке и в практическом приложении изучаются в курсе листовой штамповки.

Усилие деформирования заготовки при раздаче может быть вычислено по следующей простой формуле:

$$P = \left| \sigma_p^{\max} \right| \cdot 2 \cdot \pi \cdot R_3 \cdot s_0, \quad (34.19)$$

где s_0 – толщина исходной заготовки.

3. Деформационные параметры процесса можно определить из следующих соотношений. **Окружную деформацию** легко найти из геометрических соотношений:

$$e_\theta = \ln \frac{\rho}{R_3}. \quad (34.20)$$

Связь между окружной и нормальной (по толщине стенки) деформациями e_n устанавливается на основании подобия кругов Мора для напряжений и деформаций с учетом условия постоянства объема:

$$\frac{\sigma_p - \sigma_n}{\sigma_\theta - \sigma_n} = \frac{e_p - e_n}{e_\theta - e_n}; \quad e_p = -e_n - e_\theta. \quad (34.21)$$

Вводя обозначение и проводя элементарные преобразования, получим:

$$\chi = \frac{\sigma_p}{\sigma_\theta} = -\frac{2 \cdot e_n + e_\theta}{e_\theta - e_n}; \quad e_\theta \cdot \chi - \chi \cdot e_n = -2 \cdot e_n - e_\theta; \quad e_n = \frac{\chi + 1}{(\chi - 2)} \cdot e_\theta. \quad (34.22)$$

Пренебрегая напряжением по толщине заготовки в (34.22) и принимая в расчет значения напряжений в формулах (34.2) и (34.7), получим:

$$\chi = \frac{\sigma_s \cdot (1 - f \cdot \operatorname{ctg} \alpha_k) \cdot \left(1 - \frac{R_k}{\rho} \right)}{\sigma_s} = (1 - f \cdot \operatorname{ctg} \alpha_k) \cdot \left(1 - \frac{R_k}{\rho} \right). \quad (34.23)$$

Итак, все деформации определены в формулах (34.21) – (34.23). Определим толщину заготовки s в очаге деформации:

$$e_z = \ln \frac{s}{s_0}; \quad \ln \frac{s}{s_0} = \ln \left(\frac{\rho}{R_3} \right)^{\chi-2} \Rightarrow s = s_0 \left(\frac{\rho}{R_3} \right)^{\frac{\chi+1}{2}}. \quad (34.24)$$

Проще всего это сделать для кромки ($\rho = R_k$ и $\chi = 0$, см. формулу (34.24)):

$$s = s_0 \left(\frac{R_k}{R_3} \right)^{-\frac{1}{2}} = \frac{s_0}{\sqrt{k_{\text{разд}}}}. \quad (34.25)$$

Формула (34.24) дает верное значение и для основания части заготовки, находящегося у основания раструба, когда $\rho = R_3$: $s = s_0 \left(\frac{1}{1} \right) = s_0$.

Предельные возможности процесса раздачи определяются предельными значениями коэффициента раздачи, зависящего от толщины и диаметра заготовки, применяемого материала, конструкции технологической оснастки и режимов формообразования. В частности, **практический угол конуса пуансона** составляет величину (15 – 25) градусов, который увеличивается с увеличением коэффициента трения. Разрушение заготовки на торце является основным препятствием на пути интенсификации процесса. Можно наложить ограничения на окружные деформации на кромке:

$$\varepsilon_{\theta} = \frac{R_k - R_3}{R_3} = k_{\text{разд}} - 1 \leq \lambda \cdot \delta, \quad (34.26)$$

где δ – относительное удлинение материала заготовки; λ – некоторый коэффициент, учитывающий указанные выше факторы.

Из формулы (34.26) следует **ограничение на коэффициент раздачи**:

$$k_{\text{разд}} \leq 1 + \lambda \cdot \delta. \quad (34.27)$$

Практические значения коэффициента раздачи, например, для стали 20 составляют 1,2...1,43.

Как и в случае обжима, данная теория не является универсальной: изменение формы пуансона требует существенного пересмотра используемых соотношений. Например, криволинейная образующая пуансона порождает в уравнении равновесия дополнительный член, ибо радиус кривизны в меридиональном направлении уже не равен бесконечности.

Контрольные вопросы и упражнения

1. Дайте определение операции раздачи цилиндрической заготовки.
2. Назовите два основных способа раздачи и сферу их применения.
3. Изобразите схему раздачи.
4. Назовите три зоны, на которые условно можно разбить заготовку.
5. Сформулируйте общую постановку задачи анализа процесса раздачи.
6. Как расположены меридиональная и окружная составляющие напряжений в первой зоне?

7. Запишите уравнение равновесия осесимметричной заготовки.
8. Чему равны радиусы кривизны заготовки в первой зоне?
9. Как формулируется условие пластичности для первой зоны и чем оно обусловлено?
10. Приведите уравнение равновесия в первой зоне к уравнению с разделяющимися переменными.
11. Обоснуйте и сформулируйте граничные условия для уравнения равновесия в первой зоне.
12. Проинтегрируйте уравнение равновесия и найдите его частное решение для первой зоны.
13. Какой вид имеет уравнение равновесия во второй зоне?
14. Проинтегрируйте уравнение равновесия совместно с пластичности во второй зоне.
15. Сформулируйте приближенное граничное условие для второй зоны.
16. Сделайте необходимые расчеты для определения константы интегрирования для второй зоны.
17. Запишите формулу для определения напряжений во второй зоне.
18. Чему равно напряжение в третьей зоне?
19. Какие допущения следует принять для получения максимального напряжения в третьей зоне?
20. Запишите формулу максимального напряжения в третьей зоне.
21. Дайте определение коэффициента раздачи.
22. Запишите формулу определения усилия деформирования при раздаче, дайте пояснения.
23. Как определяют окружную деформацию при раздаче?
24. Выполните необходимые преобразования для установления связи между нормальной и окружной деформациями.
25. Сделайте вывод формулы для определения толщины заготовки в произвольной точке очага деформаций.
26. Как можно подсчитать толщину заготовки и утолщение в процентах вблизи кромки?
27. Какие факторы определяют предельные возможности процесса раздачи?
28. Каков практический угол конуса пуансона и как он зависит от коэффициента трения?
29. Сформулируйте ограничение на коэффициент раздачи.
30. Почему данная теория подлежит корректировке, если пуансон имеет криволинейную образующую?

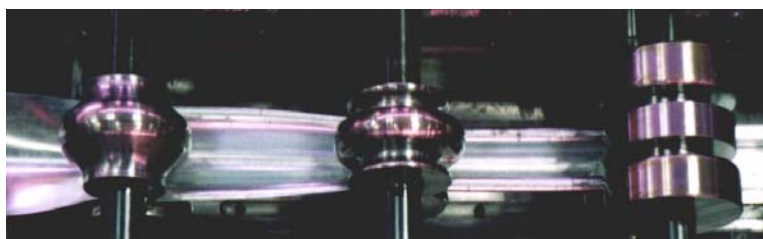
Лекция 35. Профилирование полосы в роликах

=====

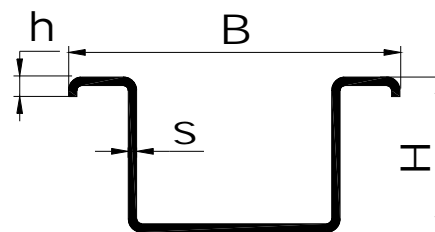
1. Методы изготовления профилей в роликах. 2. Внедрение технологии и оборудования для реализации интенсивных методов формообразования. 3. Направления исследований в области профилирования.

=====

1. Профилирование в роликах – процесс преобразования плоской ленты в профиль пространственной формы на парнороликовых профилегибочных станках (рис. 35.1). Профилирование в роликах может быть условно разделено на традиционное профилирование (ТП), интенсивное деформирование (МИД) и стесненный изгиб (СИ). В таблице ниже перечислены характерные отличительные черты каждого из этих методов формообразования профиля в роликах.



а



б

Рис. 35.1. Изготовление корытного профиля за 3 перехода на станке ГПС-500М6:
а) – вид на станок сверху; б) – поперечное сечение готового профиля

В сравнении с другими методами производства профильных деталей постоянного сечения (гибкой в штампах, прессованием, гибкой в машинах с поворотной траверсой, волочением в фильерах) профилирование в роликах обладает рядом преимуществ:

- *возможность изготовления профилей разнообразной номенклатуры с минимальной толщиной стенок и неограниченной длиной;*
- *возможность замены сочетания нескольких стандартных профилей в конструкциях одним, имеющим сложную конфигурацию;*
- *возможность изготовления профилей из заготовок с покрытием;*
- *незначительные отходы металла, не превышающие, как правило, (1 – 2) %;*
- *высокое качество поверхности профиля с шероховатостью, не превышающей 0,63 мкм;*
- *высокая точность размеров профилей, не ниже 8 – 10 квалитетов;*
- *сравнительно высокая производительность труда и адаптируемость технологии к масштабам производства;*

- *возможность совмещения профилирования с другими производственными процессами (правка, отрезка, гибка по контуру); возможность механизации и автоматизации производства и др.*

В дополнение к указанным преимуществам метод интенсивного деформирования и стесненный изгиб характеризуются:

- *возможностью производства профилей повышенной жесткости: с утолщением зоны сгиба до (20 – 30) % и минимальным радиусом гiba в 2 – 3 меньшим радиуса гiba, допускаемого при традиционных методах гибки; возможностью деформирования высокопрочных и композиционных материалов, обладающих низкими пластическими свойствами;*

- *возможностью использования компактного оборудования, имеющего малые габариты и невысокую стоимость при относительно небольшом энергопотреблении;*

- *использованием малого количества средств технологического оснащения, что позволяет сократить затраты на технологическую подготовку производства и уменьшить время и трудоемкость переналадок оборудования.*

Традиционное профилирование предусматривает использование многоклетевых профилегибочных машин с числом клеток от 10 до 52. Для СИ и МИД применяют малогабаритные станки типа ГПС с числом клеток, обычно не превышающем шести (рис. 35.2).

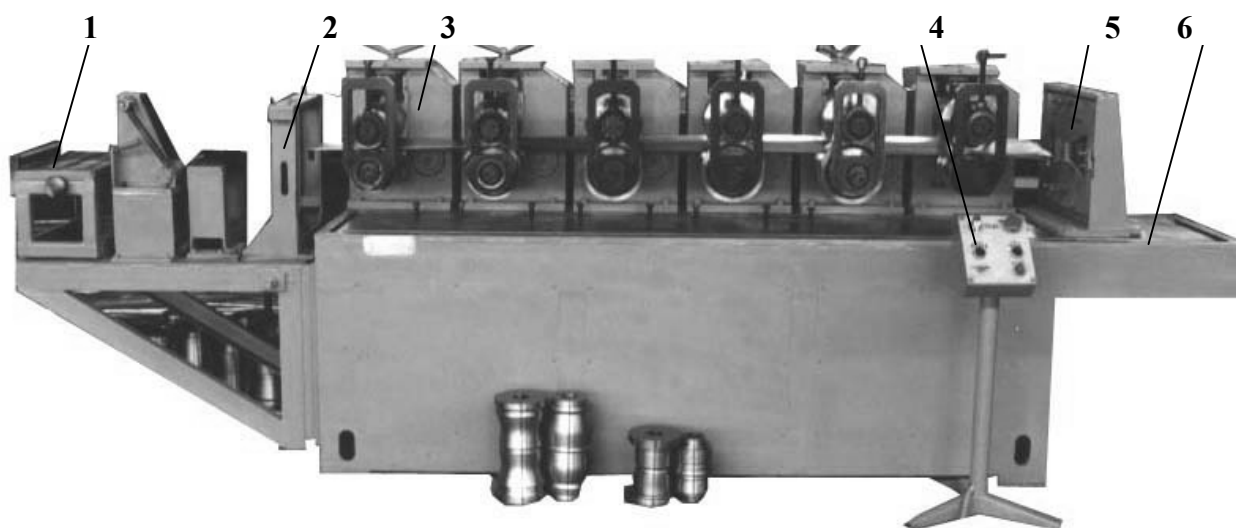


Рис. 35.2. Станок ГПС-350М6: 1 – направляющее устройство; 2 – клеть предварительного формообразования; 3 – профилирующие клетки; 4 – пульт управления; 5 – устройство для правки профиля; 6 – станина

При интенсивном формообразовании нейтральный слой деформаций практически совпадает со средней линией, в то время как при традиционном профилировании нейтральный слой деформаций смещается к внутреннему контуру, а при стесненном изгибе – к наружному контуру зоны сгиба (рис. 35.3). Отсюда следует, что при стесненном изгибе и интенсивном деформировании происходит разгрузка наружного контура зоны сгиба, что позволяет обеспечивать меньшие радиусыгиба без разрушения заготовки.

При стесненном изгибе наряду с малым радиусом зон сгиба (меньшим допустимого для данного материала) можно получить утолщения в угловой зоне за счет придания заготовке волнообразной формы с последующей ее осадкой. Возможны схемы с торцевым поджатием при плоской стенке, однако для набора утолщения в угловой зоне данная схема пригодна лишь для профилей с малой шириной полки (до $(20...30) S_0$). Увеличение ширины полки приводит либо к потере ее устойчивости (неплоскостности полки в поперечном направлении), либо к кромковой волнистости, что, безусловно, ограничивает технологические возможности метода.

2. Ежегодно в России внедряется несколько десятков линий и станков для производства профилей методом интенсивного деформирования в роликах. Например, ОАО «Ульяновский НИАТ» ежегодно внедряет до десяти линий и отдельных станков для производства около 100 типоразмеров профилей. За последние 15 лет это предприятие внедрило технологии интенсивного формообразования и соответствующее промышленное оборудование на **13** предприятиях авиационной отрасли, **5** предприятиях автомобилестроения, **3** предприятиях электротехнической промышленности и примерно на **50** предприятиях строительной индустрии, не считая **60 – 70** малых фирм различной специализации, также использующих разработки в области профилирования, выполненные совместно ОАО «Ульяновский НИАТ» и кафедрами машиностроительного факультета Ульяновского государственного технического университета.

Профили из алюминиевых сплавов, изготовленные методом стесненного изгиба и методом интенсивного деформирования (рис. 35.4), используют в качестве стрингеров самолетов Ил-114, Ил-103, Ту-334, Бе-200, Ан-70, Ан-140. Применение таких профилей в авиастроении обусловлено их относительно высокой жесткостью, повышенным ресурсом по сравнению с прессованными профилями (в 2 – 3 раза), а также технологической эффективностью методов их изготовления.

В последние годы в строительной сфере возрос спрос на сложные профили с элементами жесткости, изготавливаемые из сталей с различными видами покрытий (рис. 35.5). Такие профили применяют для отделки интерьеров и фасадов зданий, в качестве ограждений и т. д.

Характеристика методов формообразования профиля в роликах

Характерный показатель	Традиционное профилирование	Метод интенсивного деформирования	Стесненный изгиб
Толщина заготовки, мм	0,5...3,0	0,5...3,0	0,5...3,0
Скорость профилирования, м/мин	12...60 (до 180)	6...30	2...15
Углы подгибки за переход, град	8...12	10...40	10...40*
Тип калибра	Открытый с высвобождением	Закрытый	Закрытый
Форма калибра	Прямолинейные участки с сопряжением в углах	Прямолинейные участки с сопряжением в углах	Волнообразная
Диаметры роликов (по межосевому расстоянию)	D	$(0,4...0,7) \cdot D^{**}$	$(0,5...0,7) \cdot D$
Число переходов	N	$(0,5...0,7) \cdot N$	$(0,4...0,7) \cdot N$
Приложение дополнительных сил	–	Аксиальная, торцевая***	Торцевая, осадка заготовки
Правильное устройство	Не обязательно	Обязательно	Обязательно
Режим формовки радиусагиба	Плавный по переходам	На первых переходах	На последних переходах
Форма линии профилирования	Прямая	Кривая	Кривая
Технологические возможности: а) Н/С (отношение высоты профиля Н к ширине его дна С) б) r_b/s_0 (отношение внутреннего радиусагиба к толщине ленты)	Любые $r_b/s_0 > (r_b/s_0)_{\text{допуст.}}$	Любые $r_b/s_0 > 0,5$	$H/C \leq 2$ для прямой схемы; $H/C < 5$ для обратной схемы $r_b/s_0 > 0$
<p>* – измеряется по наклону прямолинейного участка боковой стенки; ** – различие в значениях средних диаметров; *** – для специальных схем</p>			

Результаты исследований в области интенсификации процессов профилирования отражены более чем в 250 публикациях, в том числе в 70 изобретениях.

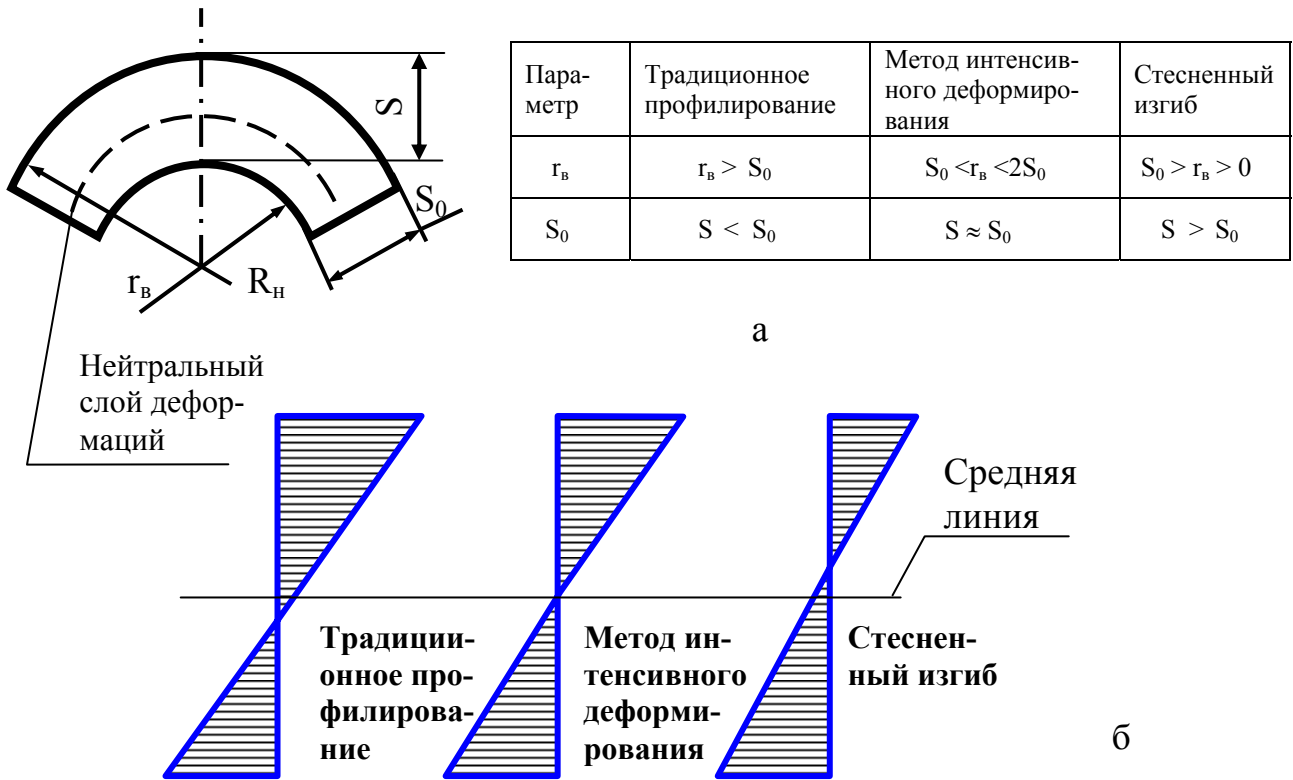


Рис. 35.3. Угловая зона и окружные деформации при различных методах изготовления профиля в роликах: а – зона сгиба и характеристики методов; б – эпюры окружных деформаций

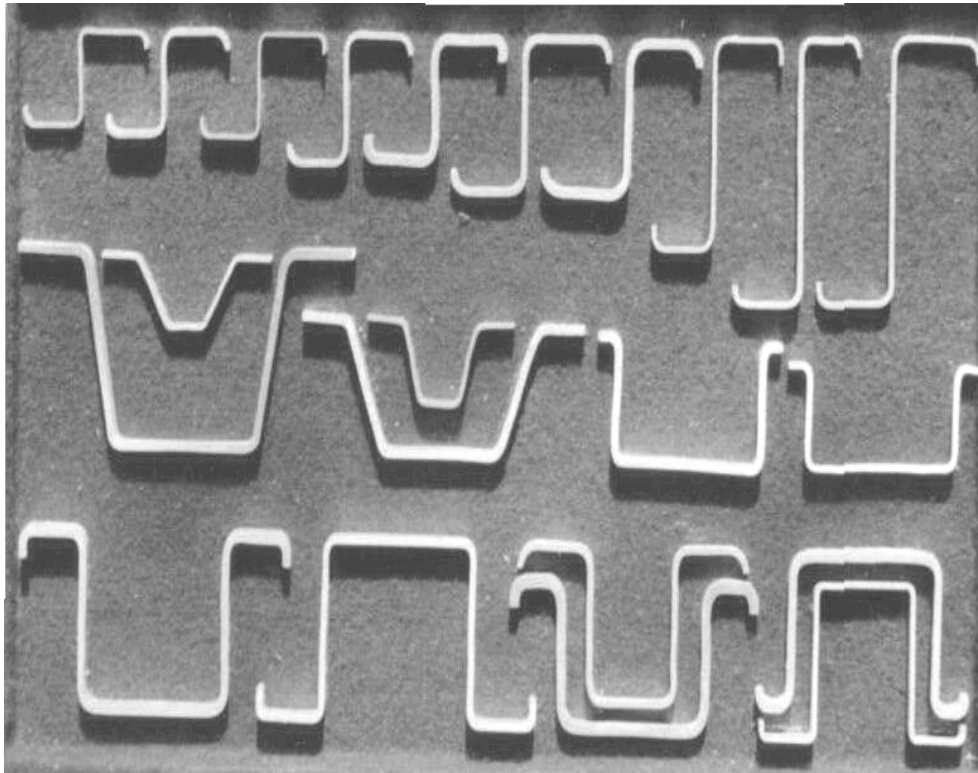


Рис. 35.4. Авиационные профили из легких сплавов

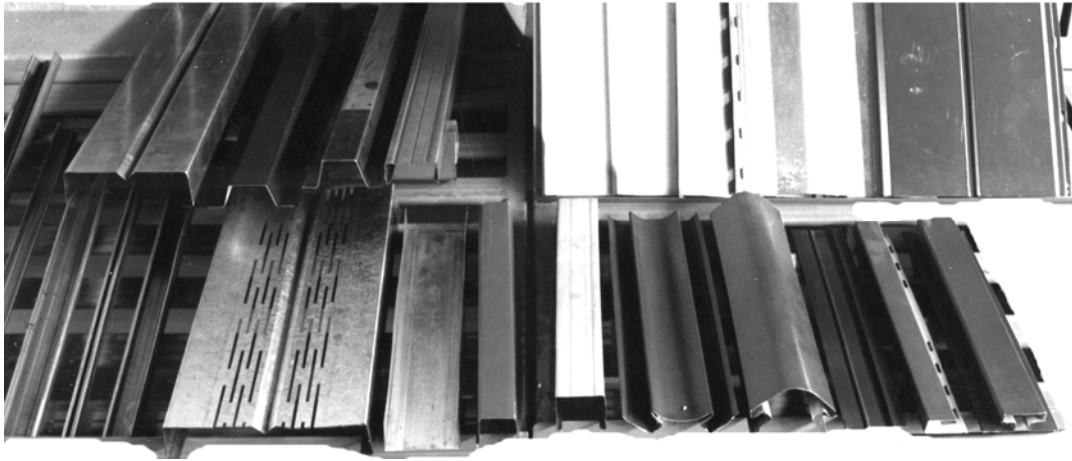


Рис. 35.5. Профили сложных сечений для строительства

3. Хотя многие научные проблемы производства профилей типовой номенклатуры можно считать решенными и процедуру проектирования и обработки профиля рутинной, имеется много задач в этой области, подлежащих решению.

Предстоит разработать:

- Модели формообразования профилей из материалов с покрытием с целью определения условий сохранности последнего в процессе формоизменения заготовки.

- Модели поведения заготовки в межклетьевом пространстве при изготовлении сложных неравнополочных профилей с элементами жесткости (отбортовки, рифты, петельные элементы, элементы двойной толщины) с целью выявления условий устойчивости процесса и оптимальных схем формообразования.

- Новые схемы и способы формообразования профилей с одновременным приданием профилю заданной продольной кривизны или винтовой скрутки.

- Новые способы перфорации, совмещенной с формообразованием, продольной и поперечной резкой профиля.

- Новые виды оборудования, инструмента, межклетьевых проводок, активных направляющих и правильных устройств, гибочных блоков, требующих наличия надежных математических моделей.

- Средства автоматизации проектирования и изготовления сложных профильных деталей.

Студенты, специализирующиеся в области ОМД, могут приложить свои силы в этой интересной, полезной для общества сфере. Именно здесь будут востребованы знания, здесь можно стать первоклассным специалистом, владеющим методиками исследований, практикой разработки технологии, опытом внедрения созданных технологий в различных отраслях промышленности. За работу, друзья, есть повод послужить Отчизне и своему будущему!

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Данный курс лекций полностью соответствует стандарту специальности и является самостоятельным (доступным для понимания студентом материала без обращения к другим источникам) для последовательного и систематического изучения дисциплины «Теория обработки металлов давлением», преподаваемой в технических университетах. Рассмотрены преимущественно классические решения задач ТОМД.

Методика работы над материалом:

1. Желательно, чтобы студент ознакомился с материалом лекции до изложения ее преподавателем.

2. Внимательно прослушать лекцию, читаемую преподавателем, законспектировать материал, не вошедший в основной курс.

3. При самостоятельной подготовке: прочитать лекцию, провести все выкладки самостоятельно по мере ее чтения.

4. Попытаться восстановить общую структуру лекции в памяти, а также частные вопросы.

Алгоритм восстановления общей структуры лекции: а) для чего используется материал (какую проблему решает) или чем вызвано его появление; б) в чем суть излагаемой проблемы (попытаться припомнить схематичное представление процесса, идею того или иного метода и т.п.); в) какие допущения принимались; г) какие известные идеи и формулы использованы; д) какие были запомнившиеся особенности, в том числе манера изложения материала преподавателем; е) что получили на выходе; и) в чем состояло резюме (вывод).

5. Прочитать лекцию вторично.

6. Ответить на вопросы. По лекции произвести выверку ответов. Неверные ответы и вопросы, не получившие ответа, подлежат повторной проработке до усвоения материала.

7. При необходимости, а также при желании углубленного изучения предмета рекомендуется обращаться к литературе, перечень которой приводится ниже. Можно также получить консультацию преподавателя.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Александров, А. В. Основы теории упругости и пластичности / А. В. Александров, В. Д. Потапов. – М.: Высшая школа, 1990. – 400 с.
2. Арышенский, Ю. М. Теория и расчеты пластического формоизменения анизотропных материалов / Ю. М. Арышенский. – М.: Metallurgia, 1990. – 304 с.
3. Гоффман, О. Введение в теорию пластичности для инженеров / О. Гоффман, Г. Закс. – М.: Машгиз, 1957. – 279 с.
4. Громов, Н. П. Теория обработки металлов давлением / Н. П. Громов. – М.: Metallurgia, 1978. – 360 с.
5. Гун, Г. Я. Теоретические основы обработки металлов давлением / Г. Я. Гун. – М.: Metallurgia, 1980. – 456 с.
6. Евстратов, В. А. Теория обработки металлов давлением / В. А. Евстратов. – Харьков: Высшая школа, 1981. – 248 с.
7. Ершов, В. И. Совершенствование формоизменяющих операций листовой штамповки / В. И. Ершов, В. И. Глазков, М. Ф. Каширин. – М.: Машиностроение, 1990. – 312 с.
8. Ильюшин, А. А. Механика сплошной среды / А. А. Ильюшин. – М.: Издательство МГУ, 1990. – 310 с.
9. Колмогоров, В. Л. Механика обработки металлов давлением / В. Л. Колмогоров. – М.: Metallurgia, 1986. – 688 с.
10. Мастеров, В. А. Теория пластической деформации и ОМД / В. А. Мастеров, В. С. Берковский. – М.: Metallurgia, 1989. – 400 с.
11. Наумчев, Б. А. Основные теории процессовковки и объемной штамповки / Б. А. Наумчев, А. П. Атрощенко. – Куйбышев: КПИ, 1974. – 374 с.
12. Работнов, Ю. Н. Механика деформируемого твердого тела / Ю. Н. Работнов. – М.: Наука, 1988. – 712 с.
13. Романовский, В. П. Справочник по холодной штамповке / В. П. Романовский. – М.: Машиностроение, 1977. – 520 с.
14. Смирнов-Аляев, Г. А. Сопротивление металлов пластическому деформированию / Г. А. Смирнов-Аляев. – Л.: Машиностроение, 1978. – 368 с.
15. Соколовский, В. В. Теория пластичности / В. В. Соколовский. – М.: Высшая школа, 1969. – 608 с.
16. Сторожев, М. В. Теория обработки металлов давлением / М. В. Сторожев, Е. А. Попов. – М.: Машиностроение, 1977. – 423 с.
17. Теория пластических деформаций металлов / Под ред. Унксова Е. П. – М.: Машиностроение, 1983. – 598 с.
18. Томсен, Э. Механика пластических деформаций при обработке металлов / Э. Томсен, Ч. Янг, Ш. Кобаяши. – М.: Машиностроение, 1968. – 504 с.
19. Унксов, Е. П. Инженерная теория пластичности / Е. П. Унксов. – М.: Машгиз, 1957. – 327 с.
20. Хилл, Р. Математическая теория пластичности / Р. Хилл. – М.: ГИТТЛ, 1956. – 398 с.

..... **Дополнительные источники литературы**

1. Смирнов, В. С. Сборник задач по обработке металлов давлением / В. С. Смирнов. – М.: Металлургия, 1973. – 191 с.
2. Арышенский, Ю. М. Теоретические основы расчетов технологических процессов кузнечно-штамповочного производства / Ю. М. Арышенский, В. В. Уваров, В. Ю. Ненашев. – Куйбышев: КуАИ, 1973. – 114 с.
3. Мейз, Дж. Теория и задачи механики сплошных сред / Дж. Мейз. – М.: Мир, 1974. – 318 с.
4. Ректорис, К. Вариационные методы в математической физике и технике / К. Ректорис. – М.: Мир, 1985. – 590 с.
5. Васидзу, К. Вариационные методы в теории упругости и пластичности / К. Васидзу. – М.: Мир, 1987. – 542 с.
6. Джонсон, К. Механика контактного взаимодействия / К. Джонсон. – М.: Мир, 1989. – 510 с.
7. Галлагер, Р. Метод конечных элементов / Р. Галлагер. – М.: Мир, 1984. – 428 с.
8. Фрейденталь, А. Математические теории неупругой сплошной среды / А. Фрейденталь, Х. Гейрингер. – М.: ГИФМЛ, 1962. – 432 с.
9. Качанов, Л. М. Основы теории пластичности / Л. М. Качанов. – М.: Наука, 1969. – 420 с.
10. Аркулис, Г. Э. Теория пластичности / Г. Э. Аркулис, В. Г. Дорогобид. – М.: Металлургия, 1987. – 352 с.
11. Берлет, Ю. Н. Теория обработки металлов давлением. Методические указания к решению задач / Ю. Н. Берлет, В. И. Филимонов. – Ульяновск, 1992. – 36 с.

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ	3
<u>Раздел 1. ПРИРОДА ПЛАСТИЧЕСКОЙ ДЕФОРМАЦИИ</u>	
<i>Лекция 1.</i> Понятие о напряжении, видах деформации, скорости деформации и пластичности	4
<i>Лекция 2.</i> Строение металлов и сплавов	7
<i>Лекция 3.</i> несовершенства решетки и структуры металлов	12
<i>Лекция 4.</i> Остаточные напряжения, особенности пластического деформирования и упрочнение материалов	18
<u>Раздел 2. ВЛИЯНИЕ ТЕМПЕРАТУРЫ И СКОРОСТИ</u>	
<i>Лекция 5.</i> Явления возврата и рекристаллизации	27
<i>Лекция 6.</i> Влияние скорости деформации на пластичность и сопротивление деформированию. Сверхпластичность и специальные способы ОМД	33
<u>Раздел 3. НАПРЯЖЕНИЯ</u>	
<i>Лекция 7.</i> Теория напряжений	39
<i>Лекция 8.</i> Интегральные условия равновесия. Главные напряжения	45
<i>Лекция 9.</i> Преобразование компонент тензора напряжений. Интенсивность напряжений	52
<i>Лекция 10.</i> Круговая диаграмма напряжений Мора. Показатель напряженного состояния	58
<i>Лекция 11.</i> Плоская задача теории пластичности	65
<i>Лекция 12.</i> Осесимметричное напряженное состояние	70
<u>Раздел 4. ДЕФОРМАЦИИ И СКОРОСТИ ДЕФОРМАЦИЙ</u>	
<i>Лекция 13.</i> Движение сплошной среды. Деформации	76
<i>Лекция 14.</i> Условие совместности деформаций	82
<u>Раздел 5. УСЛОВИЕ ПЛАСТИЧНОСТИ</u>	
<i>Лекция 15.</i> Модели пластического формоизменения и условия пластичности	87
<u>Раздел 6. СВЯЗЬ МЕЖДУ НАПРЯЖЕНИЯМИ, ДЕФОРМАЦИЯМИ И СКОРОСТЯМИ ДЕФОРМАЦИЙ</u>	
<i>Лекция 16.</i> Физические уравнения теории пластичности	92

	<u>Раздел 7. КОНТАКТНОЕ ТРЕНИЕ</u>	
Лекция 17.	Контактное трение	96
	<u>Раздел 8. ЗАКОНЫ ПЛАСТИЧЕСКОЙ ДЕФОРМАЦИИ</u>	
Лекция 18.	Законы пластической деформации	103
	<u>Раздел 9. ЯВЛЕНИЕ, ОГРАНИЧИВАЮЩЕЕ ПЛАСТИЧЕСКОЕ ФОРМОИЗМЕНЕНИЕ</u>	
Лекция 19.	Разрушение при деформации	108
	<u>Раздел 10. МЕТОДЫ ТЕОРЕТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА</u>	
Лекция 20.	Общая характеристика методов ТОМД	112
Лекция 21.	Метод линий скольжения	115
Лекция 22.	Метод верхней оценки. Метод СПДМ	122
Лекция 23.	Метод баланса работ	127
	<u>Раздел 11. ОПЕРАЦИИ ОБРАБОТКИ МЕТАЛЛОВ ДАВЛЕНИЕМ</u>	
Лекция 24.	Осадка прямоугольной полосы	133
Лекция 25.	Работа при осадке заготовки. Протяжка заготовки. Открытая и закрытая прошивка	137
Лекция 26.	Прокатка широкой полосы	147
Лекция 27.	Прессование в конической матрице	152
Лекция 28.	Объемная штамповка в открытых штампах	157
Лекция 29.	Гибка широкой полосы	164
Лекция 30.	Вытяжка без утонения стенки	171
Лекция 31.	Вытяжка с утонением стенки	176
Лекция 32.	Отбортовка заготовки с отверстием	181
Лекция 33.	Обжим в конической матрице	187
Лекция 34.	Раздача трубы на коническом пуансоне	192
Лекция 35.	Профилирование полосы в роликах	198
	ЗАКЛЮЧЕНИЕ	204
	БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК	205